

Vyčíslitelnost a složitost 2005/2006

Domácí úloha 2

Zbyněk Křivka

krivka@fit.vutbr.cz, kancelář C48

Prerekvizity a potřebné definice

Základní stavební bloky¹: $L, R, x, R_x, R_{\neg x}, L_x, L_{\neg x}, S_R, S_L$, kde $x \in \Gamma$.

Nechť $\mathcal{L}(REG)$, $\mathcal{L}(CF)$, $\mathcal{L}(RE)$ označují třídu regulárních, bezkontextových, kontextových a rekurzivně spočetných jazyků. Třída rozhodnutelných jazyků (problémů) \subset Třída nerozhodnutelných jazyků (problémy) = Třída jazyků přijatelných Turingovým strojem.

Remark. Je-li $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ Turingovým strojem podle definice z přednášek, pak $\Sigma \subseteq \Gamma$ a každé pravidlo z δ je tvaru $(Q - \{q_F\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{L, R\})$, kde $L, R \notin \Gamma$.

Definition 1. Řetězec $w \in \Sigma^*$ je přijat Turingovým strojem $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$, jestliže se při aktivaci M z počáteční konfigurace pásky $\underline{\Delta}w_1\Delta\Delta\dots$ a počátečního stavu q_0 stroj M zastaví (tj. přejde do koncového stavu q_F). Množinu $L(M) = \{w \mid w \text{ je přijat Turingovým strojem } M\}$ nazýváme *jazyk přijímaný Turingovým strojem* M .

Definition 2. Vícepáskový TS s k páskami a jim k odpovídajícími hlavami je definován jako $M = (Q, \Sigma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \delta, q_0, q_F)$, kde mají všechny komponenty stejný význam jako u klasického TS až na tvar přechodové funkce δ , kterou definujeme pro k -páskový TS takto:

$\delta: (Q - \{q_F\}) \times (\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_k) \rightarrow Q \times (\Gamma_i \cup \{L, R\}) \times \{1, 2, \dots, k\}$, kde $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Příklad přechodu dvoupáskového TS: $(q_0, a, \Delta) \rightarrow (q_1, a, 2)$. V případě zakreslení této orientované hrany do diagramu přechodů ze stavu q_0 do q_1 bude tato šipka ohodnocena $(a, \Delta)/(a, 2)$ a říká, že dvoupáskový stroj, který je ve stavu q_0 a na první pásce pod čtecí hlavou obsahuje symbol a a na druhé pásce pod její čtecí hlavou obsahuje Δ , pak se na druhou pásku na čtené místo zapíše symbol a a stroj přejde do stavu q_1 .

Domácí úloha č. 2

- 2.1) Pomocí kompozitního diagramu TS zapište algoritmus převádějící řetězec a^n na řetězec a^{2^n} , kde $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$. Např. vstup: $\underline{\Delta}aaa\Delta\Delta\dots$, výstup: $\underline{\Delta}aaaaaaaaa\Delta\Delta\dots$. Při konstrukci můžete použít základní stavební bloky (viz prerekvizity). Páska je zleva ohraničená a zadání vyžaduje, aby vstup i výstup byl umístěn na začátku pásky (jak je to v příkladě vstupu a výstupu).
- 2.2) a) Určete uzavřenosti vybraných tříd jazyků na operace sjednocení, průnik dvou jazyků a komplement jazyka vyplněním následující tabulky (ANO/NE):

¹ povolené moduly

Třída X	sjednocení ($L_1 \cup L_2$)	průnik ($L_1 \cap L_2$)	komplement (\bar{L}_1), kde $L_1, L_2 \in X$
$\mathcal{L}(REG)$			
$\mathcal{L}(CF)$			
$\mathcal{L}(RE)$			

Tab. 1: DU 2.2

- b) Výsledky v jednotlivých buňkách pro třídy $\mathcal{L}(REG)$ a $\mathcal{L}(RE)$ krátce zdůvodněte.
- 2.3) Uvažujte všechny Turingovy stroje (podle definice z přednášek) s právě dvěma stavy nad vstupní abecedou $\Sigma = \{x, y\}$.
- a) Vypište všechny jazyky, které lze generovat deterministickým TS se dvěma stavy.
b) Vypište všechny jazyky, které lze generovat nedeterministickým TS se dvěma stavy

Poznámky: Není třeba opisovat jazyky z bodu a) i do bodu b), přestože podle definice každý deterministický TS splňuje i definici nedeterministického TS.

Ke každému jazyku uveďte alespoň jeden dvoustavový Turingův stroj (formou přechodového diagramu), který daný jazyk přijímá. Také doporučuji si zopakovat přesné znění definice TS a jazyka přijímaného TS (viz přednášky, případně prerekvizity).

- 2.4) Zakódujte program pro universální Turingův stroj popisující modul \mathbf{R}_x (uvažujte jeho přechodový diagram z přednášek) pro vstupní abecedu $\Sigma = \{x\}$ a s počátečním obsahem pásky $\underline{\Delta}\Delta xx\Delta\Delta\dots$. Uveďte kódování pro jednotlivé části (symboly páskové abecedy, stavy, akce, přechody) i celého “programu”. Vycházejte ze způsobu kódování uvedeném na přednášce (slajdy TS 17-20).
- 2.5) a) Ukažte, že třída jazyků rozhodnutelných Turingovými stroji nad libovolnou abecedou je nekonečná ale spočítatelná.
b) Platí stejné tvrzení jako a) i pro jazyky přijímané Turingovými stroji? Krátce zdůvodněte?
c) Ukažte, že jestliže Turingův stroj M přijímá každý řetězec w jazyka $L(M)$ během méně než $|w| + 1$ kroků, potom $L(M)$ je regulární.

Doplňkový příklad

Doplňkový příklad nemá vliv na bodové hodnocení úlohy, ale může sloužit jako náhradní příklad, v případě vynechání jednoho z příkladů. Pokud si nejste jisti, zda danou problematiku dostatečně ovládáte, tak si jej určitě zkuste vyřešit.

Vytvořte jednopáskový TS $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ simulující dvoupáskový TS $M_2 = (\{q_S, q_K\}, \{a\}, \Gamma_1 = \{a, \Delta\}, \Gamma_2 = \{a, \Delta\}, \delta_2, q_S, q_K)$, kde $\delta_2 = \{(q_S, \Delta, \Delta) \rightarrow (q_K, R, 1)\}$. Pomocí způsobu simulace více páskového TS jednopáskovým uvedeným na přednášce (slajdy TS 8-10) doplňte (a vypište) obsahy množin definujících stroj M_1 .

Pokyny k odevzdání

Termín odevzdání: 24. 10. 2005

Domácí úlohu vypracovávají studenti samostatně a je ohodnocena nejvýše jedním bodem. Odevzdávána je cvičícímu nebo přednášejícímu nejpozději těsně před začátkem demonstračního cvičení, kde budou diskutovány výsledky a správný postup řešení úloh.