

# Vyčíslitelnost a složitost 2005/2006

## Domácí úloha 3

Zbyněk Křivka  
krivka@fit.vutbr.cz, kancelář C48

### Domácí úloha č. 3

- 3.1) a) Uveďte příklad věty patřící do jazyka definovaného problémem zastavení  $L_F$  (slajdy 22–23) a příklad věty nepatřící do tohoto jazyka.  
b) Lze sestavit Turingův stroj rozhodující tento jazyk  $L_F$  a proč?  
c) Uveďte praktický důsledek odpovědi z bodu b).

V případě hlubšího zájmu:

[http://en.wikipedia.org/wiki/Halting\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Halting_problem)

- 3.2) Mějme abecedu  $A$ , posloupnost všech unárních primitivně rekurzivních funkcí  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  nad  $A$  a nechť je zadána unární funkce  $f: A^* \rightarrow A^*$  takto:

$$f(x) = \begin{cases} f_n(a^n) a & \text{jestliže } x = a^n \in \{a\}^*; \\ \varepsilon & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $a \in A$ . Je  $f$  primitivně rekurzivní? Dokažte.

Nápověda:  $a^n$  je  $n$ -tá mocnina řetězce  $a$ . Důkaz lze elegantně vést sporem.

- 3.3) a) Dokažte, že funkce počítající libovolný prvek Fibonacciho posloupnosti (viz fig. 1) je primitivně rekurzivní.  
b) Ukažte, že umocňování přirozených čísel je také primitivně rekurzivní funkce.

$$F_n := F(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0; \\ 1 & \text{if } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

Fig. 1: DÚ 3.3: Výpočet  $n$ -tého prvku Fibonacciho posloupnosti

- 3.4) Mějme parciálně rekurzivní funkce  $f, g$  a primitivně rekurzivní funkce  $p, q$ . Jsou následující funkce  $h_a, h_b, h_c, h_d$  a  $h_e$  Turingovsky vyčíslitelné? Svě odpovědi zdůvodněte.

$$a) h_a(x) = \begin{cases} f(x): & \text{jestliže je } f(x) \text{ definovaná;} \\ g(x): & \text{jestliže je } g(x) \text{ definovaná a } f(x) \text{ není definovaná;} \\ \text{ndef.}: & \text{jestliže není definována ani } f(x) \text{ ani } g(x). \end{cases}$$

- b)  $h_b$  je def. pro ty hodnoty, pro které je definována alespoň jedna z funkcí  $f$  a  $g$ .  
c)  $h_c$  je definována pro ty hodnoty, pro které je definována funkce  $f$  a zároveň i  $g$ .  
d)  $h_d = p^q$ .  
e)  $h_e$ : Modifikujte příklad a) tak, že  $f$  a  $g$  budou primitivně rekurzivní funkce.

## Doplňkový příklad

Doplňkový příklad nemá vliv na bodové hodnocení úlohy, ale může sloužit jako náhradní příklad, v případě vynechání jednoho z příkladů. Pokud si nejste jisti, zda danou problematiku dostatečně ovládáte, tak si jej určitě zkuste vyřešit.

“Tiskový problém” pro Turingův stroj  $M$  a nějaký symbol jeho páskové abecedy  $x$  je problém určení, zda pro nějaký vstupní řetězec  $w$  provede stroj  $M$  při přijímání řetězce  $w$  alespoň jeden zápis symbolu  $x$  na pásku. Je tento problém rozhodnutelný? Zdůvodněte.

## Pokyny k odevzdání

**Termín odevzdání: 7. 11. 2005**

Domácí úlohu vypracovávají studenti samostatně a je ohodnocena nejvýše jedním bodem. Odevzdávána je cvičícímu nebo přednášejícímu nejpozději těsně před začátkem demonstračního cvičení, kde budou diskutovány výsledky a správný postup řešení úloh.