Vyčíslitelnost a složitost 2005/2006
Domácí úloha 4 a 5

Zbyněk Křivka
krivka@fit.vutbr.cz, kancelář C48

4.1) a) Určete přesnou časovou i prostorovou složitost modulu Turingova stroje S_L (viz slajd TS05) se vstupní abecedou $\Sigma = \{a\}$.
b) Uveďte základní obecný vztah mezi časovou a prostorovou složitostí a zdůvodněte jej.

4.2) a) Ukažte, že jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{x, y\}$ tvořený řetězci tvaru ww^R, kde $w \in \Sigma^*$ a w^R je řetězec w zapsaný v obráceném pořadí, je přijímán nedeterministickým vícepáskovým Turingovým strojem s časovou složitostí $\Theta(n)$.
b) Ukažte, že časová složitost přijímání jazyka L (viz a)) na deterministickém jednopáskovém Turingově stroji je $\Theta(n^2)$.
c) Patří tento jazyk L do třídy **P**?

4.3) a) Uveďte příklady algoritmů, které mají při výpočtu na jednopáskovém deterministickém Turingově stroji složitosti $\Theta(n)$, $\Theta(n^2)$ a $\Theta(c^n)$, kde $c > 1$ je konstanta.
b) Uveďte příklady funkcí $g_1(n)$, $g_2(n)$ a $g_3(n)$, aby patřily do množin funkcí následovně: $g_1(n) \in O(f(n))$, $g_2(n) \in \Theta(f(n))$, $g_3(n) \in \Omega(f(n))$, kde $f(n) = n^2 + 2n + 3$.

4.4) a) Ve skeletonové jazyce napište algoritmus pro výpočet mocniny dvou přirozených čísel $exp(n, m) = n^m$, kde $n, m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.
Povolené základní příkazy: `incr var`, `decr var`, `while var <> 0 do ... end`.
Pomocné makro-zápisy: `clear var`, `var1←var2`.
b) Pro pomocné makro `var1←var2` určete přesnou časovou složitost (operace inkrementace, dekrementace a kontrola na nulu pomocí `while name<>0` trvá jednu časovou jednotku).

5.1) a) Popište definici jazyka L_{SAT} vlastními slovy (NE kopie slajdů z přednášek).
b) K logické formuli $(v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3)$ sestrojte její reprezentaci v SAT problému. Uveďte podmínky, kdy tato věta patří do L_{SAT} a rozhodněte, zda patří.
c) Uveďte další příklad splnitelné a nesplnitelné logické formule (jiné než na slajdech).
d) Neformálně zdůvodněte, proč je tento problém v třídě **NP**.

5.2) Popište tři vybrané NP-úplné problémy (kromě SAT problému).

5.3) a) Platí, že $2^n \in \Omega(n!)$?
b) Jsou funkce $n!$ a n^k polynomiálně vázané, když k je libovolná kladná konstanta?

Doplňkový příklad

Doplňkový příklad nemá vliv na bodové hodnocení úlohy, ale může sloužit jako náhradní příklad, v případě vynechání jednoho z příkladů. Pokud si nejste jisti, zda danou problematiku dostatečně ovládáte, tak si jej určitě zkuste vyřešit.

Ukažte, že každý algoritmus, který lze provést na dvoupáskovém deterministickém Turingově stroji s časovou složitostí $O(f(n))$, lze na jednopáskovém Turingově stroji provést nejhůře s časovou složitostí $O(f^2(n))$.

Pokyny k odevzdání

Termín odevzdání: 5. 12. 2005

Domácí úlohu vypracovávají studenti samostatně a protože má tato úloha rozsah dvou předchozích, tak je ohodnocena nejvýše dvěma body. Odevzdávána je cvičícímu nebo přednášejícímu nejpozději těsně před začátkem demonstračního cvičení, kde budou diskutovány výsledky a správný postup řešení úloh.