

VSL Demonstrační cvičení 2

ZS 2005

Ing. Zbyněk Křivka

krivka@fit.vutbr.cz

Konzultace: Po 11-12h, místnost C48

Poslední možnost odevzdat

krivka@fit.vutbr.cz

Konzultace: Po 11-12h, místnost C48

Poslední možnost
odevzdat vypracovanou
domácí úlohu
na tento týden !!!

Příklad 2.1 – Zadání

Pomocí kompozitního diagramu TS zapište algoritmus převádějící řetězec a^n na řetězec a^{2^n} , kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Např. vstup: $\underline{\Delta}aaa\Delta\Delta\dots$, výstup: $\underline{\Delta}aaaaaaaaa\Delta\Delta\dots$. Při konstrukci můžete použít základní stavební bloky (viz prerekvizity). Páska je zleva ohraničená a zadání vyžaduje, aby vstup i výstup byl umístěn na začátku pásky (jak je to v příkladě vstupu a výstupu).

Princip:

- Dva řetězce na pásce
- Počet symbolů prvního řetězce = n
- Při každém odebrání jednoho symbolu z prvního řetězce provedu zdvojnásobení délky druhého řetězce (využiji pomocný symbol $\bar{a}$)

Řešení: viz tabule

Příklad 2.1 – Náčrtek řešení

TODO: nakreslit na tabuli

Příklad 2.2 - Zadání

- a) Určete uzavřenosti vybraných tříd jazyků na operace sjednocení, průnik dvou jazyků a komplement jazyka vyplněním následující tabulky (ANO/NE):
- b) Výsledky v jednotlivých buňkách pro třídy **REG** a **RE** krátce zdůvodněte.

Řešení:

Třída jazyků	$\cup$	$\cap$	Doplněk
REG	ANO	ANO	ANO
CF	ANO	NE	NE
RE	ANO	ANO	NE

Příklad 2.2b – Řešení 1/3

REG = KA = RV)

Každý regulární jazyk lze popsat regulárním výrazem.

Sjednocení odpovídá operaci varianty u regulárních výrazů (např. $a(a+b)^* + b(a+b)^*$)

Každý regulární jazyk lze popsat deterministickým konečným automatem. **Doplňek** lze přijmout modifikovaným konečným automatem se změnou množinou koncových stavů na $F_{new} = Q - F_{old}$.

Uzavřenost na **průnik** plyne z předchozího a z deMorganových zákonů (viz minulé cvičení).

Příklad 2.2b – Řešení 2/3

RE = TS = L_0)

Sjednocení dvou jazyků typu 0 s gramatikami

$G_1=(N_1, T_1, P_1, S_1)$ a $G_2=(N_2, T_2, P_2, S_2)$

je popsáno novou gramatikou

$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S)$.

Průnik dvou jazyků popsaných TS M_1 a TS M_2 odpovídá sestrojení 2-páskového TS M , který pracuje takto:

- Proveďte kopii vstupního řetězce na druhou pásku (záložní)
- Nechá pracovat stroj M_1 na první pásce.
- Pokud M_1 zastavil, tak obnoví obsah první pásky ze záložní a spustí na ni druhý stroj M_2 .
- Pokud i ten zastaví, tak oba stroje přijímají tutéž větu, což odpovídá definici operace průniku.

Příklad 2.2b – Řešení 3/3

RE = TS = L_0)

Doplněk (komplement) jazyka:

***Princip:** existuje zadání definující jazyk L takové, že nelze sestavit validní TS pro přijímání doplňku tohoto jazyka.*

Příklad:

- Mějme jazyk $L_1 = \{ w \mid M_w \text{ přijímá řetězec } w \}$. **Jeho doplněk L_0 nelze přijímat žádným TS (důkaz viz slajdy 19 a 21).**
- Komplement jazyk definovaného problémem zastavení
- Doplněk jakéhokoliv nerozhodnutelného jazyka je mimo třídu **RE**.

PS: Jazyky rozhodnutelné jsou uzavřeny na operaci doplněk.
Naopak nerozhodnutelné nejsou uzavřeny vzhledem k doplňku.

Příklad 2.3 - Zadání

Uvažujte všechny Turingovy stroje (podle definice z přednášek) s právě dvěma stavy nad vstupní abecedou $\Sigma = \{x, y\}$.

- a) Vypište všechny jazyky, které lze přijímat deterministickým TS se dvěma stavy.
- b) Vypište všechny jazyky, které lze přijímat nedeterministickým TS se dvěma stavy.

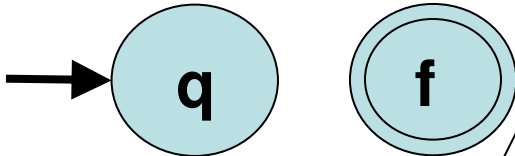
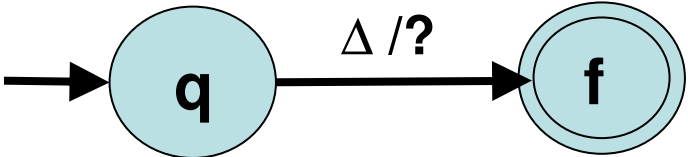
Pomůcka:

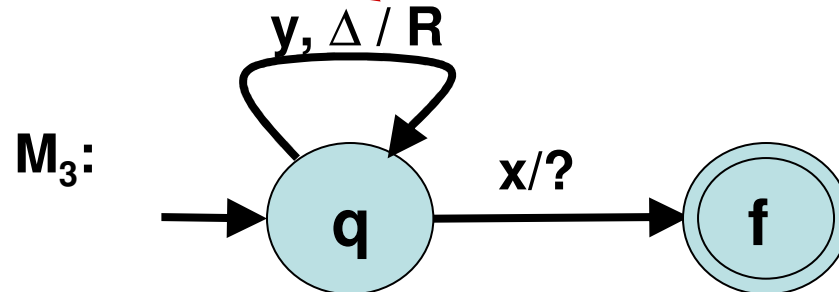
- ? ... označuje libovolný symbol nebo akci (L, R).

Příklad 2.3a – Řešení

- Princip:** $|Q| \geq 2$; počáteční konfigurace: $q\Delta w\Delta\Delta$

a) Deterministické TS:

- $L(M_1) = \emptyset$

- 
- $L(M_3) = y^*x\Sigma^*$
- $L(M_4) = x^*y\Sigma^*$
 - Analogicky k M_3



w neobsahuje Δ

Příklad 2.3b – Řešení

b) Nedeterministické TS:

- Nepřijímají žádné nové jazyky oproti deterministickým dvoustavovým TS.

Příklad 2.4 – Zadání

Zakódujte program pro universální Turingův stroj popisující modul R_x (pro vstupní abecedu $\Sigma = \{x\}$ a s počátečním obsahem pásky $\underline{\Delta}\Delta xx\Delta\Delta\dots$).

Uveďte kódování pro jednotlivé části (symboly páskové abecedy, stavy, akce, přechody) i celého „programu“.

Princip:

- Binární kódování (symboly 0 a 1)
- 1 – oddělovač
- 0 – podle počtu nul kóduji různé stavy, akce či symboly

Příklad 2.4 – Řešení

Řešení:

- Symboly a akce: $\Delta \approx \varepsilon$, $L \approx 0$, $R \approx 00$, $x \approx 000$
- Stavy: $q_0 \approx 0$, $q_F \approx 00$, $q_1 \approx 000$
- Přechody: $q_0x \rightarrow q_1R \approx 010001000100$
- $q_0\Delta \rightarrow q_1R \approx 011000100$
- $q_1\Delta \rightarrow q_1R \approx 00011000100$
- $q_1x \rightarrow q_Fx \approx 00010001001000$
- Obsah pásky: $\underline{\Delta}\Delta xx\Delta\Delta\ldots \approx 110001000111\ldots$
- Celý binární program pro univerzální TS:
 - 1 010001000100 1 011000100 1 00011000100 1
 00010001001000 11 110001000111...

Příklad 2.5 – Zadání

- a) Ukažte, že třída jazyků rozhodnutelných Turingovými stroji nad libovolnou abecedou je nekonečná ale spočítatelná.
- b) Platí stejné tvrzení jako a) i pro jazyky přijímané Turingovými stroji? Krátce zdůvodněte?
- c) Ukažte, že jestliže Turingův stroj M přijímá každý řetězec w jazyka $L(M)$ během méně než $|w|+1$ kroků, potom $L(M)$ je regulární.

Příklad 2.5ab – Řešení

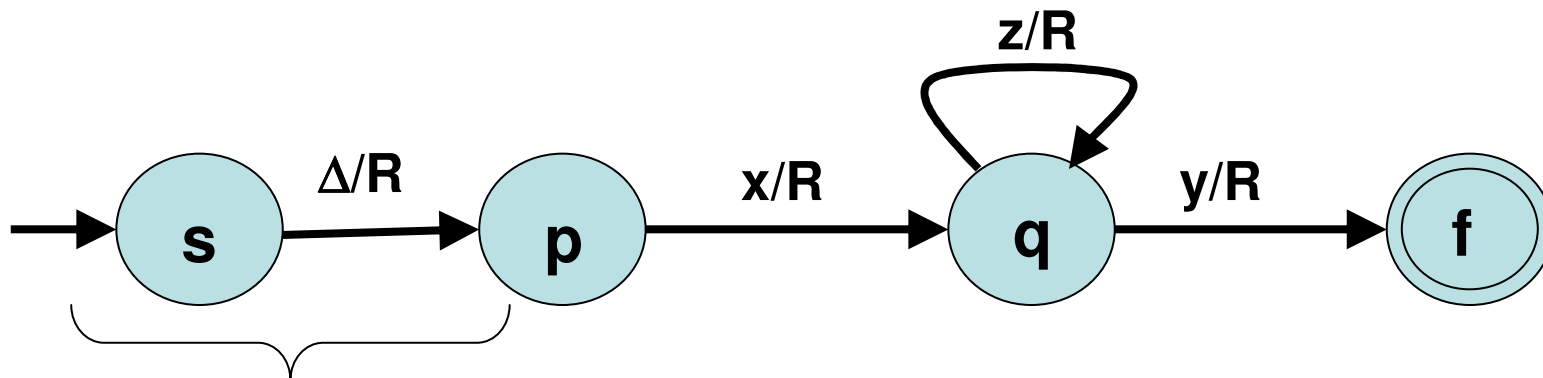
- Regulární jazyky **REG** – rozhodnutelné
 - $\text{REG} \subseteq \mathbf{L}_{\text{rozhodnutelné}}$
 - REG nekonečno $\Rightarrow \mathbf{L}_{\text{rozhodnutelné}}$ nekonečno
- $\mathbf{L}_{\text{rozhodnutelné}} \subseteq \mathbf{L}_{\text{přijatelné}}$
 - $\mathbf{L}_{\text{přijatelné}}$ spočetné, protože ex. bijekce přiřazující každému TS M přirozené číslo $n \in \mathbf{N}$: $\mathbf{f}: \mathbf{L}_{\text{přijatelné}} \leftrightarrow \mathbf{N}$
- **REG** $\subseteq \mathbf{L}_{\text{rozhodnutelné}} \subseteq \mathbf{L}_{\text{přijatelné}}$
 - Množina jazyků rozhodnutelných i přijímaných TS je **nekonečná ale spočetná**.
- PS: Množina všech podmnožin nekonečné množiny je vždy nespočetná, např. množina reálných nebo komplexních čísel

Příklad 2.5c – Řešení 1/2

- *Nejhorší případ* přijetí jazyka TS: kontrola každého místa na pásce (mimo „blanků“)
- $|w|+1$ kroků: můžu pouze zkontrolovat *aktuální pozici a posunout hlavu* o jedno na další pozici (1 krok) (vždy stejným směrem, např. doprava)
- Není možné *žádné vracení* (obecně bych to nestihl za $|w|+1$ kroků).
- Páska slouží pouze pro vstup $\Rightarrow$ konečný automat (*žádná pomocná paměť*)!
- 1 krok – inicializační fáze (přečtení počátečního „blanku“)
- **Speciální případ: nemusím načíst celý vstup.**

Příklad 2.5c – Řešení 2/2

- Např. $L = \{ xz^*y \mid x,y,z \in \Sigma \}$:
- Např. obsah pásky: $\underline{\Delta} x z z z y \Delta \Delta \Delta \dots$



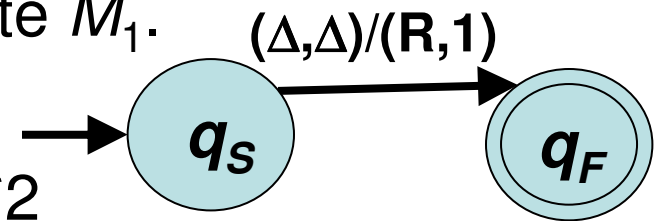
- inicializační krok (přečtení počátečního „blanku“)
- Speciální případ: $L(M) = \Sigma^*$. Kolik kroků?
 - Stačí jeden krok!

Příklad 2.Bonus - Zadání

Vytvořte jednopáskový TS $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ simulující dvoupáskový TS $M_2 = (\{q_S, q_K\}, \{a\}, \Gamma_1 = \{a, \Delta\}, \Gamma_2 = \{a, \Delta\}, \delta_2, q_S, q_K)$, kde $\delta_2 = \{(q_S, \Delta, \Delta) \rightarrow (q_K, R, 1)\}$. Definujte M_1 .

Řešení:

- Počet symbolů $|\Gamma| = 1 + |\Gamma_1|*2 * |\Gamma_2|*2$

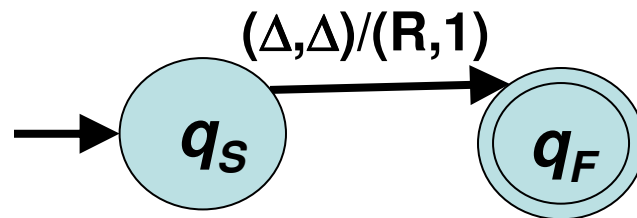


$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & a & a & a & a & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & a & a & a & a \\ \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 & \Delta & 1 \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & a & a & a & a & a & a \\ \Delta & \Delta & 1 & 1 & \Delta & \Delta & 1 & 1 & \Delta & \Delta & 1 & 1 & \Delta & \Delta & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

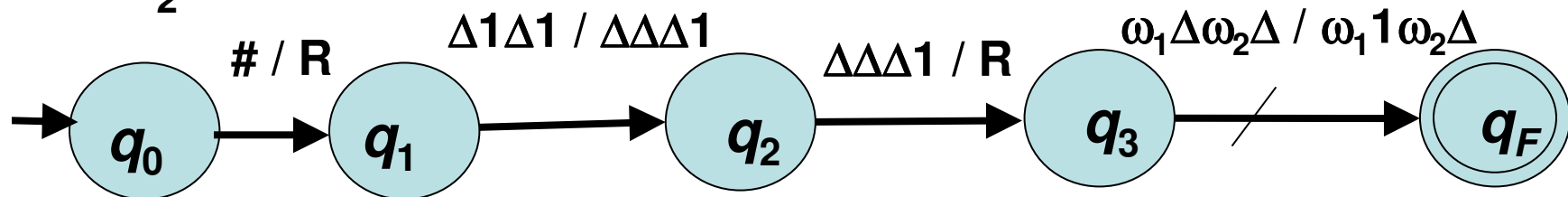
Příklad 2.Bonus – Řešení

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_F\}$
- $\delta = \{q_0\# \rightarrow q_1 R, q_1\Delta 1\Delta 1 \rightarrow q_2\Delta\Delta\Delta 1, q_2\Delta\Delta\Delta 1 \rightarrow q_3 R,$
 $q_3\Delta\Delta\Delta\Delta \rightarrow q_F\Delta 1\Delta\Delta, q_3a\Delta\Delta\Delta \rightarrow q_Fa 1\Delta\Delta,$
 $q_3\Delta\Delta a\Delta \rightarrow q_F\Delta 1a\Delta, q_3a\Delta a\Delta \rightarrow q_Fa 1a\Delta\}$

- M_1 :



- M_2 :



Dotazy?

Děkuji za pozornost!

Nashledanou!