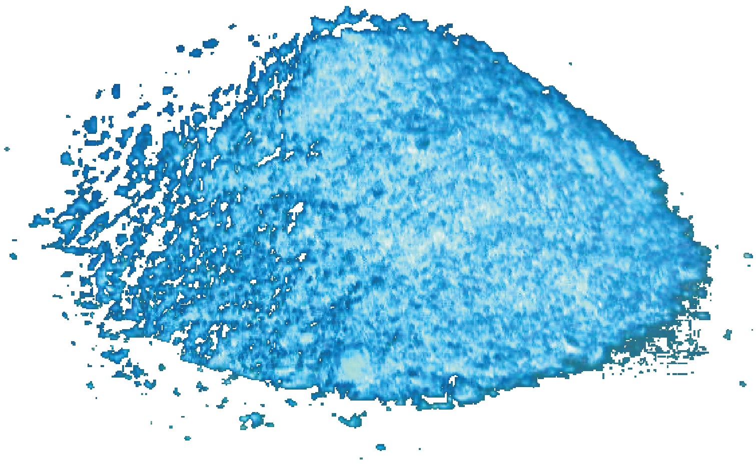
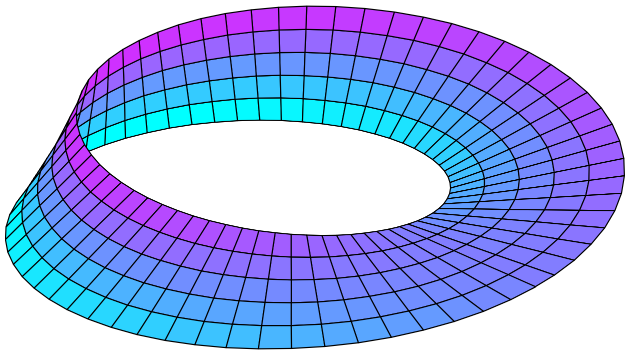
0. Co je to topologie?

matematická disciplína, studující prostorové vlastnosti množin



Množina nemá vnitřní strukturu.



Topologie „váže" prvky množiny dohromady.

1. Historické poznámky

Počátky topologie ... hluboko do historie.

1736 Euler ... problém mostů v Královci, vzdálenost irelevantní.
1752

$$v - e + f = 2,$$

(konvexní polyedr, věta o mapách).

1813 Antoine-Jean Lhuilier, neplatí pro těleso s dírami, platí

$$v - e + f - 2h = 2,$$

$\Rightarrow$ historicky první topologický invariant.

1817 Bolzano spojil pojem konvergence s libovolnou ohraničenou množinou reálných čísel.

1847 Johann Benedict Listing poprvé slovo topologie v práci Vorstudien zur Topologie.

1857 Riemann ... pojem Riemannovské plochy.

1865 Möbius ... konstrukce M. pásky. Nelze ji pokrýt souhlasně orientovanými trojúhelníky.

1872 Cantor ... pojem množiny limitních bodů, pojmy otevřené a uzavřené množiny v Eukleidově prostoru.

1877 Wierstrass ... rigorózní důkaz Bolzano-Wierstarssovy věty (Ohraničená nekonečná množina reálných čísel má hromadný bod) a zavedl pojem okolí bodu.

1895 Poincaré ... pojem homologie a homotopie.

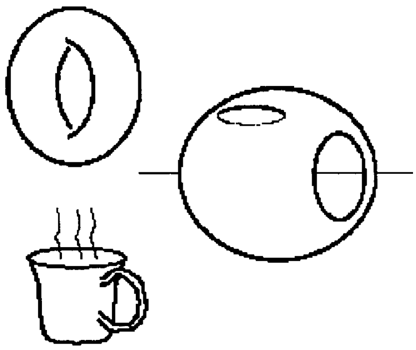
1906 Fréchet ... pojem kompaktního metrického prostoru. Otevřené a uzavřené množiny i pro metrické prostory.

1909 Riesz ... první axiomatický systém, definující topologii, založený na množinách limitních bodů.

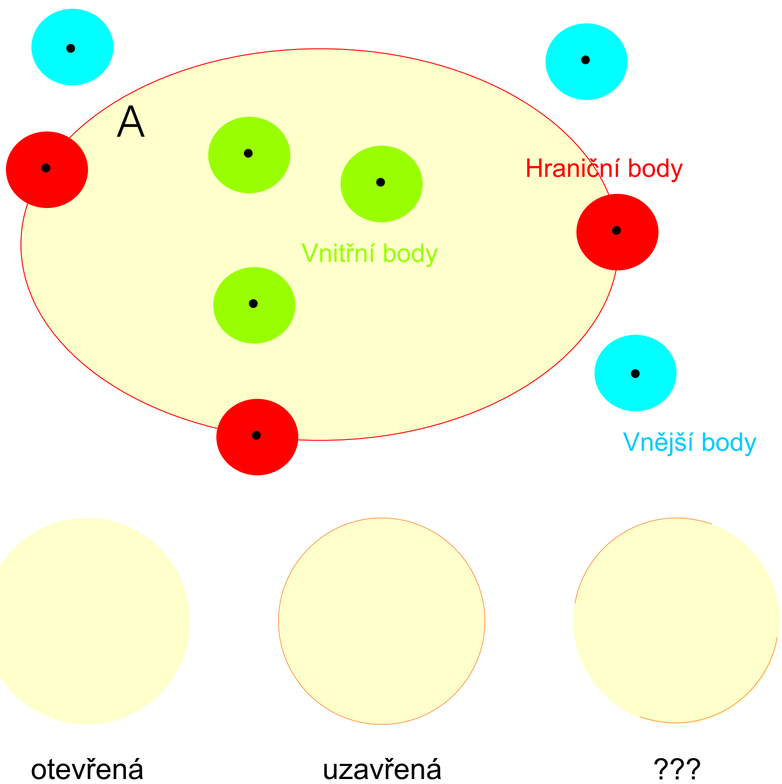
1914 Hausdorff ... topologii pomocí systému čtyř axiómů, známých jako axiómy okolí.

2. Topologie v několika přiblíženích

<u>I. Gumová geometrie:</u> Bez vzdáleností a úhlů, spojité deformace nemění některé vlastnosti . . . topologické invarianty. Šálek čaje = kobliha.



<u>II. Vlastnosti hranic</u>: Trhání v gumové geometrii → nové hranice. Hraniční body množiny, otevřenost a uzavřenost.



III. Abstraktní topologický prostor. Zapomeneme na geometrii. Specifikujeme otevřené množiny. $\tau \subseteq 2^X$ je *topologie* na X, jestliže:

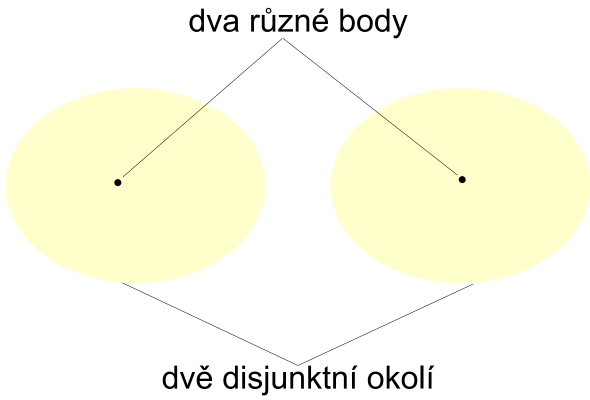
(T1) $\varnothing, X \in \tau$,
(T2) $U_i \in \tau \; \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$,
(T3) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.

Uzavřené množiny = doplňky otevřených množin. Uzávěr $\operatorname{cl} A$ množiny A ... nejmenší uzavřená množina, obsahující A.

Jiné možnosti: axiomatizace uzavřených množin, uzávěrové operace (Kuratowski), vnitřkové operace, konvergence sítí nebo filtrů.

Axiómy T1-T3 jsou velmi obecné a pokrývají mnohem více možností, než „gumovou geometrii". Proto i další axiómy.

Hausdorffův prostor:



Např. metrický prostor je Hausdorffův.

V informatice: Topologie ... k popisu přibližného stavu informace.

a ... aproximace informace i,

$U \ni a$ ... body blízké a,

r ... zpřesnění informace $i \Rightarrow r \in U$.

$\Longrightarrow$ a a r nemají disjunktní okolí.

IV. Lokalická teorie. Zapomeneme na body. Abstraktní otevřené množiny, abstraktní $\cup$ a $\cap$. Body mohou být někdy zrekonstruovány.

Svaz $(A, \vee, \wedge)$ nazveme *frame*, jestliže:

(F1) $B \subseteq A \Rightarrow \bigvee B \in A$,
(F2) $C \subseteq A$ konečná $\Rightarrow \bigwedge C \in A$,
(F3) $x \in A, Y \subseteq A \Rightarrow x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge y | \, y \in Y\}$.

false $:= \bigvee \varnothing = \bot$, **true** $:= \bigwedge \varnothing = \top$.

$A \ldots$ frame, $X \ldots$ množina, $\models \subseteq X \times A$
$x \models a \Leftrightarrow (x, a) \in \models$, čteme „x splňuje a"

Nechť platí („logika konečných pozorování"):

(TS1) $B \subseteq A$, pak $(x \models \bigvee B) \Leftrightarrow (x \models b$ pro nějaké $b \in B)$.
(TS2) $C \subseteq A$ konečná, pak $\Rightarrow (x \models \bigwedge C) \Leftrightarrow (x \models c \; \forall c \in C)$.

Pak $(X, A, \models)$ je *topologický systém*.
V TS $\ldots$ různé „otevřené množiny" (*opens*) $\ldots$ stejné body. Jinak je TS *spatial* - „prostorový", tj. TP.

Příklad 1.
$X \ldots$ množina programů,
$A \ldots$ frame možných výsledků,
$x \models a \ldots$ program x dává výsledek a.

konkrétněji:

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$,
$\mathbb{Z}_2^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$, kde $p \leq r \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}_2^* : r = pq$.
$A = \{a | \, a \subseteq \mathbb{Z}_2^*, a = \uparrow a\}$,
$(A, \cup, \cap)$ je frame (Alexandrovova topologie na $\mathbb{Z}_2^*$).
$x \models a \Leftrightarrow \exists$ řetězce $p \in \mathbb{Z}_2^*$, $q \in \mathbb{Z}_2^\infty$, že x generuje pq a $p \in a$.

```
program x;
begin
while true do begin
              output 0;
              output 1;
              end;
end;
```

Pak např. $x \models \uparrow \{010\}$, $x \models \uparrow \{0101\}$ a $x \not\models \uparrow \{1101\}$.

$X \ldots$ málo prvků (programů) $\Rightarrow \exists$ abstraktní otevřené množiny se stejnými prvky. $\square$

<u>Morfismy topologických systémů:</u>

$(X, A, \vdash)$, $(Y, B, \models) \ldots$ TS,
$f : X \to Y \ldots$ zobrazení, $g : B \to A \ldots$ homomorfismus,
Nechť $x \vdash g(b) \Leftrightarrow f(x) \models b \; \forall x \in X, b \in B$.
Pak (f, g) se nazývá *spojité zobrazení* $(X, A, \vdash) \to (Y, B, \models)$.
$\mathbf{2} = \{\mathbf{false}, \mathbf{true}\} \ldots$ frame Serpińského,
$A \ldots$ frame, $X = \{f | \, f : A \to \mathbf{2}$ je framový homomorfismus$\}$,
$x \models a \Leftrightarrow x(a) = \mathbf{true}$.
$(X, A, \models)$ je tzv. *lokál*. Obecněji, TS se nazývá lokalický, je-li homeomorfní lokálu. Lokalický TS je určen jednoznačně svým framem abstraktních otevřených množin.

<u>Lokalifikace:</u>

$D = (X, A, \models) \ldots$ TS,
$\mathrm{Loc}\, D \ldots$ lokál určený framem A.

$f : D \to E$ spojité, E lokál:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f=q\circ p"'] & \mathrm{Loc}\, D \arrow[d, "q"] \\ & E \end{tikzcd}$$

<u>Kdy je topologický prostor lokalický?</u>

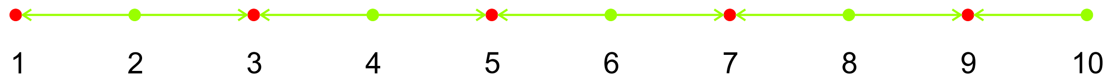
$\Leftrightarrow$ je *sober* (střízlivý)

<u>Hofmann-Mislovova věta:</u>

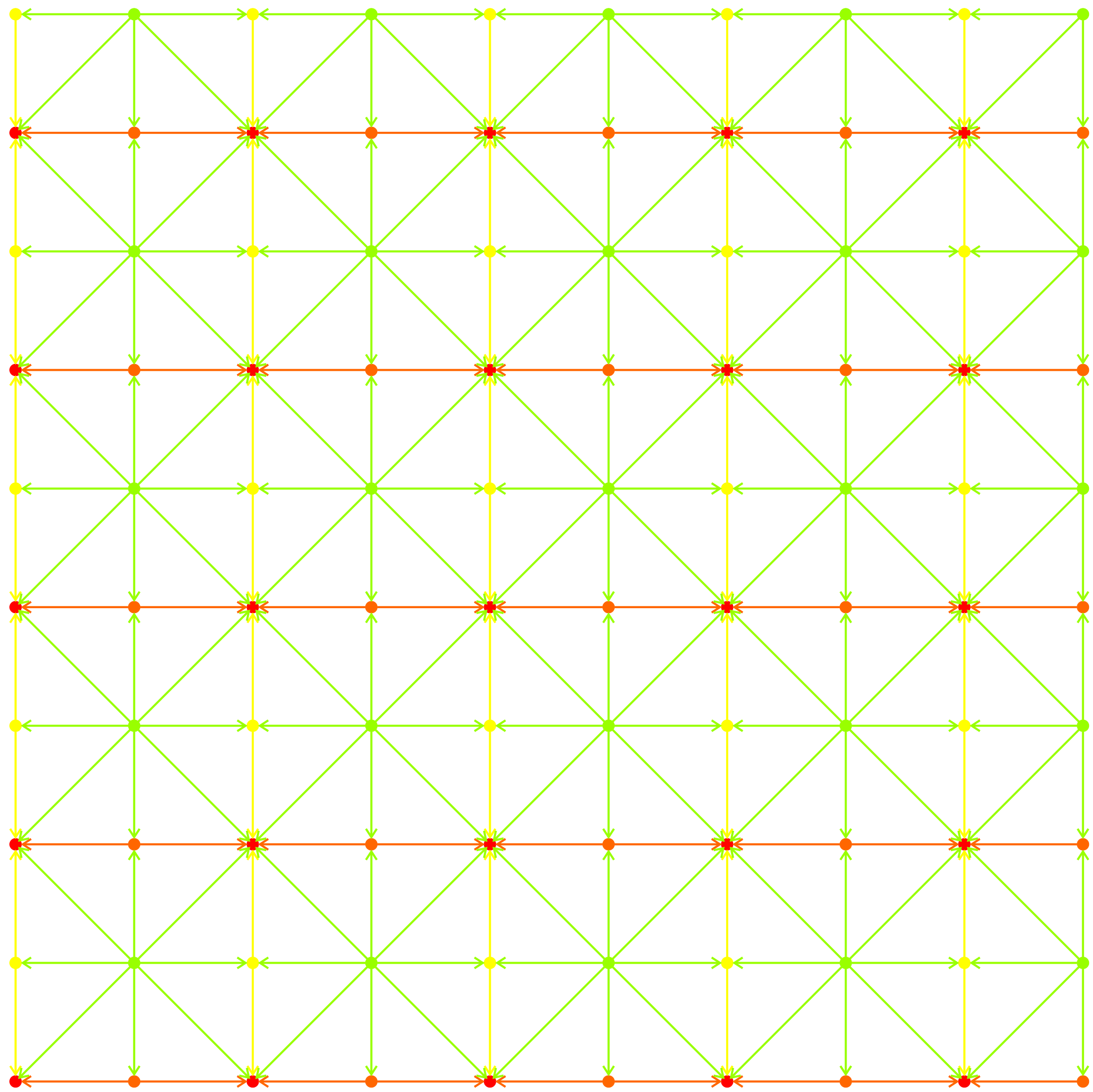
Scottově otevřené filtry $\longleftrightarrow$ *kompaktní saturované množiny*

3. Digitální topologie

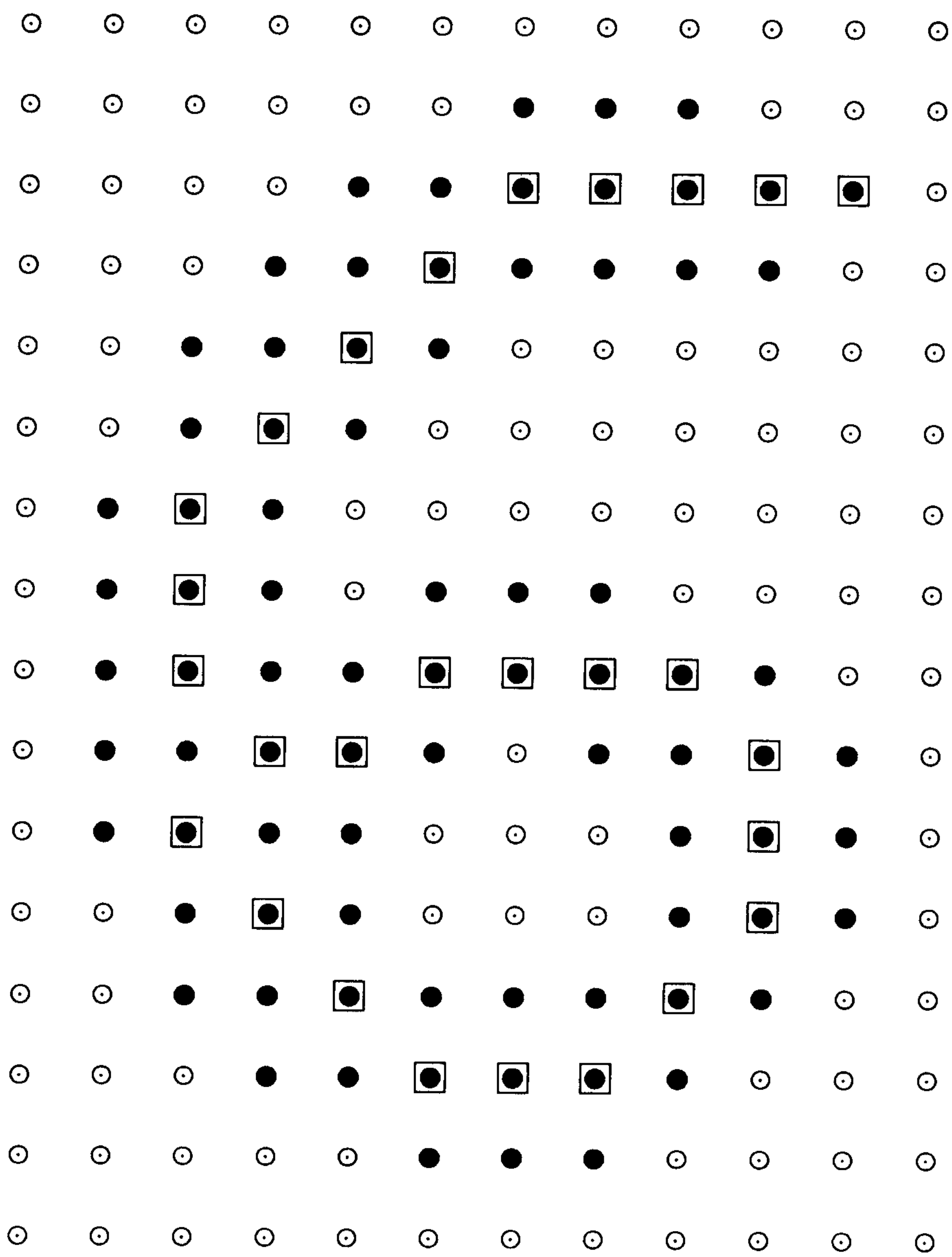
Na rozhraní topologie, geometrie a diskrétní matematiky.
$\mathbb{Z}^n$ ... digitální n-rozměrný prostor
Topologizace: Khalimského topologie a její modifikace.
$K = \mathbb{Z}$, $\tau_0 = \{\ldots\{1\}, \{1,2,3\}, \{3\}, \{3,4,5\}, \{5\}, \ldots\}$



K^2, topologie součinu:

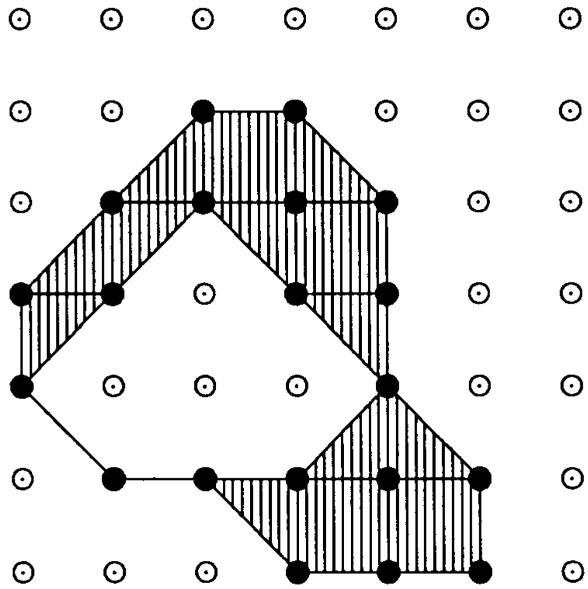


Digitální obraz ... $S \subseteq \mathbb{Z}^2$.
Které body z množiny S můžeme odstranit, aby „topologie" zůstala zachována? $\Rightarrow$ ... *thinnig.*



Problém: Jak definovat „zachování topologie"?

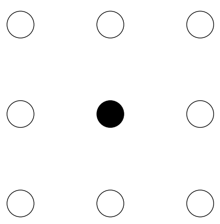
$S \subseteq \mathbb{Z}^2 \ldots$ polyedr $C(S)$:

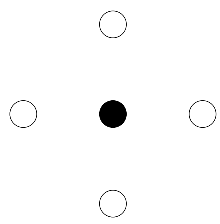


$Y \subseteq X \ldots$ *retrakt*, jestliže $\exists$ spojité $r : X \to Y$ že $r_{|Y} = \mathrm{id}_Y$.

Definice. $C(S')$ je retrakt $C(S) \Rightarrow S' \subseteq S \subseteq \mathbb{Z}^2$ zachovává topologii.

… není ovšem vhodná pro thinnigový algoritmus. Má diskrétní vyjádření?





8-sousedné okolí 4-sousedné okolí

$T \subseteq \mathbb{Z}^2 \ldots$ n-souvislá, jestliže neexistují množiny A, B, že $T = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, že žádný bod v A není n-sousedný s bodem v B.

Věta. *Množina $S' \subseteq S \subseteq \mathbb{Z}^2$ zachovává topologii konečné množiny S, jestliže každá 8-souvislá komponenta S obsahuje právě jednu 8-souvislou komponentu S' a každá 4-souvislá komponenta $\mathbb{Z}^2 \setminus S'$ obsahuje právě jednu 4-souvislou komponentu $\mathbb{Z}^2 \setminus S$.*

– umožňuje realizaci thinningových algoritmů v $\mathbb{Z}^2$,
– zatím neexistuje vhodná teorie v $\mathbb{Z}^3$.

4. Denotační sémantika a teorie domainů

Položka dat $\rightarrow$ typ (jaké operace s daty)
Základní typy: Boolean, Integer, Real, ...
+ konstruktory pro uživatelské typy.

S, T ... typy $\Rightarrow$
záznamový typ $S \times T$,
sjednocující typ $S + T$,
funkční typ $[S \rightarrow T]$.

Množina možných prvků každého typu:
1. výčtem pro základní typy.
2. pro každý konstruktor – jak nové prvky vznikají ze starých.

Nové typy mohou vznikat i rekurzívně:
List(A) ... typ seznamů prvků typu A (atomů) ... vztahem

$$\text{List}(A) = \{\textbf{nil}\} + A \times \text{List}(A).$$

... seznam je buď **nil** – prázdný seznam – nebo je složen z atomu (head, hlavička) a jiného seznamu (tail, ocas, tělo).

Rekurzívní definice $\rightarrow$ množinově-teoretické spory(?):

stav = [paměťové místo $\rightarrow$ uložitelná hodnota]
uložitelná hodnota = $\cdots +$ procedura $+ \ldots$
procedura = [stav $\rightarrow$ stav]

Stav počítače = hodnoty v paměťových místech.
(uloženy jsou i procedury)
Procedura = jak transformuje stavy počítače.

n stavů počítače:
počet možných procedur $= n^n$
počet uložitelných hodnot $\geq n^n$
počet možných stavů $\geq n^n > n$, spor.

Příčina sporu = funkční typ.
Východisko = nepotřebujeme všechny funkce, ale jen vypočítatelné (computable). $\Rightarrow$
... (nemusíme nutně zkoumat vypočítatelnost) ...

„množina možných hodnot" pro typ ... další strukturu, nazveme *domain*.

Dodatečná struktura ... např. topologická, přípustné funkce = spojitá zobrazení.

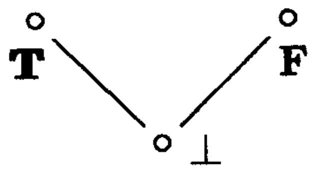
Domainy v TCS = vysoce specializované topologické systémy.
Přípustné funkce = spojité ve Scottově topologii.

$(X, \leq) \ldots$ uspořádaná množina, která má usměrněná supréma.

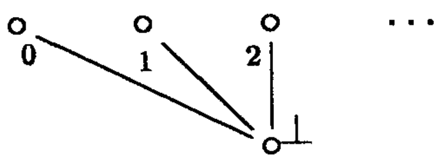
$A \subseteq X$ je uzavřená ve Scottově topologii, je-li $A = \downarrow A$ a pro $\forall D \subseteq A$ usměrněnou je $\bigvee D \in A$.

Sémantický domain = uspořádaná množina s nejmenším prvkem, uzavřená na usměrněná supréma.

<u>Domainy pro některé základní typy:</u>

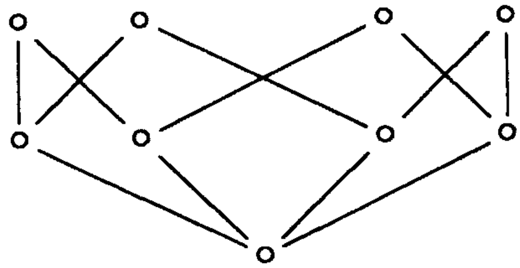


$\mathbf{B}_\perp$

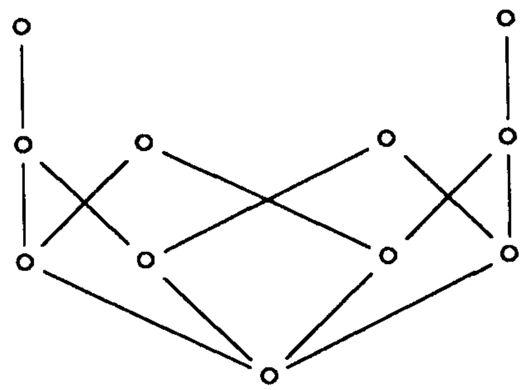


$\mathbb{N}_\perp$

<u>Domainy pro některé konstruované typy:</u>



$\mathbf{B}_\perp \times \mathbf{B}_\perp$



$[\mathbf{B}_\perp \to \mathbf{B}_\perp]$

Použití domainů: Denotační sémantika, jazyky, přechodové systémy, Petriho sítě, ... nejlepší aproximace matematických objektů ...

5. De Grootova dualita

(X, τ) ... topologický prostor,
$x \leq y \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}\{y\}$ ... *kvaziuspořádání specializace*,
$A \subseteq X$ je *saturovaná*, když $A = \uparrow A$,
$K \subseteq X$ je *kompaktní*, když z každého ot. pokrytí K lze vybrat konečné podpokrytí.

τ^d ... uzavřená báze z komp. saturovaných množin,
(X, τ^d) ... *de Grootův duál.*

Příklad 2.
program ... černá schránka, generující nějaký výstup
X ... množina programů,
A ... frame možných výsledků,
$x \models a$ ... program x dává výsledek a.
Co znamená saturovanost a kompaktnost v $(X, A, \models)$?

Saturovaná množina … největší se stejným výstupem.

Kompaktní množina (K, programů)
… když K má výstup v usměrněné B, $\exists b \in B$ že K má výstup b.

x je *nezávislý* na K
… (K má výstup a) $\not\Rightarrow$ (x má výstup a)
… píšeme $x \vdash (X \smallsetminus K)$.

$\Longrightarrow$ … de Grootův duál na X. $\square$

Příklad 3.
$A \neq \varnothing$ … abeceda,
$\forall x, y \in A^*$: $x \leq y$, jestliže $\exists u \in A^*$, že $y = xu$.

$L \subseteq A^*$ … formální jazyk,
$\operatorname{int} L = \{x | x \in A^*, \downarrow \{x\} \subseteq L\}$,
$L \subseteq A^*$ otevřená, když $\operatorname{int} L = L \Leftrightarrow L = \downarrow L$.

$\downarrow \{x\}$, $x \in X$ … otevřená báze topologie τ,
specializace je $\geq$,
τ … Alexandrovova vzhledem k $\geq$, vlastnosti:

(i) Je-li L regulární jazyk, je také $\operatorname{int} L$ regulární.
(ii) Je-li L regulární jazyk, pak $\downarrow L$ je otevřená v τ a regulární.

τ^d … tzv. *slabá topologie*
… *(horní topologie, dolní intervalová topologie)*,
$\downarrow \{x\}$ … uzavřená subbáze τ^d.

τ^{dd} … Scottova topologie vzhledem k $\geq$.
$\tau^{ddd} = \tau^d$ … slabá topologie.

patch topologie $= \tau \vee \tau^d$,
(Lawsonova topologie)$_{\geq}$ $=$ Scottova $\vee$ (slabá)$_{\leq}$
$= \tau^d \vee \tau^{dd}$.

<u>Lawson+Mislove, 1990:</u>
Je posloupnost τ, τ^d, τ^{dd}, $\ldots$ *konečná?*

<u>Kovár, 2001:</u>
Ano. Platí $(\tau \vee \tau^{dd})^d = \tau^d$, *odkud plyne* $\tau^{dd} = \tau^{dddd}$.