

THE: Teorie aukcí Auction Theory

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

November 19, 2025

Čerpáno z:

- ▶ Krishna, V.: Auction theory, Elsevier
- ▶ Nisan et al.: Algorithmic Game Theory
- ▶ Klemperer, P.: Auctions: Theory and Practice
- ▶ Shubik, M.: Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions

Co je aukce?

- ▶ Aukce (též dražba) je ekonomický mechanismus prodeje hmotného/nehmotného statku.
- ▶ Je to forma trhu, kde se soustřeďuje nabídka a poptávka po konkrétním druhu zboží typicky mezi malým počtem prodávajících a větším počtem kupujících.
- ▶ Je to způsob, jak prodat věc, u které nechci stanovit její cenu (např. proto, že ji neznám nebo chci využít odlišného chápání hodnoty věci mezi prodávajícím a kupujícím).
- ▶ Aukce nejsou jenom dražby historických předmětů nebo kuriozit, mají aplikaci v každodenním praktickém obchodě.
- ▶ E-bay aukce (Internet, electronic market design).

Aukce jako nákup předmětu.

Teorier veřejné volby versus aukce

Teorie veřejné volby:

- ▶ Kolektivní rozhodnutí o společné preferenci, potažmo o vítězi.
- ▶ Užitek hráče z rozhodnutí.
- ▶ Manipulovatelnost. Diktátorství. Arrowův teorém.

Teorie aukcí:

- ▶ Vítezí společensky nejefektivnější alternativa. Co je alternativa?
- ▶ Zkoumáme manipulovatelnost (nepravdivé ohodnocení alternativ), protože potenciálně snižuje výnos z aukce.
- ▶ Hráči platí za účast v mechanismu. Vliv na manipulovatelnost.
- ▶ Vickrey-Clarke-Groove mechanismus.

Dělení hospodářského výsledku.

Aukce o dolar (jeden)

Předmětem aukce je jeden USD. Kdo za něj nabídne nejvíc, ten dolar vyhraje a zaplatí svou nabídku. Vyvolávací cena je jeden cent.

Předpokládáme, že se aukce dostane do stavu, kdy je nabízeno 99 centů (poslední racionálně míněná nabídka) a možná 100 centů (chci vyhrát za každou cenu, cena vítězství je vyšší než jeden USD).

Hodnotu 1 USD každý zná. V aukcích ovšem prodáváme předměty, u kterých jejich hodnota není implicitně jasná.

Proč nás mají aukce zajímat?

- ▶ Aukce jsou součástí ekonomiky světa.
- ▶ Obchodníci prodávají svoje zboží, vlády licence (3G sítě) a lidé svoje předměty.
- ▶ Aukce jsou ukázkou strategického chování hráčů (kupující, prodávající) – my studujeme jejich matematické modely.
- ▶ Můžeme stát na straně prodávajícího (který se rozhoduje nad formulací mechanismu, aby maximalizoval svůj užitek) nebo kupujícího (který se snaží v rámci mechanismu maximalizovat svůj užitek).
- ▶ Chceme-li modelovat tyto situace, poznejme příslušnou Teorii aukcí.

Aukce je nekooperativní hra (kdo jsou hráči, co jsou strategie?)

- ▶ Prodávající maximalizuje výnos z aukce – nestanovuje ovšem cenu (vyvolávací cena), ale hledá mechanismus, který donutí kupující k maximálním sázkám. **Volba mechanismu je pro něj strategií ve hře.**
- ▶ Kupující i si soukromě (tajně) cení předmět aukce na částku x_i . Pokud za věc zaplatí y_i , pak **je rozdíl (nejlépe kladný) $u_i = x_i - y_i$ jeho ziskem z aukce.**
- ▶ Důležitý fakt: **cílem kupujícího není získat předmět aukce, ale maximalizovat svůj zisk.**
- ▶ Pokud kupující zaplatí $y_i = x_i$ a přesto má pocit kladného zisku (přínosu), pak evidentně předmět aukce chybně ocenil.
 - ▶ Podobně naopak (není neobvyklé, Winner's curse).
- ▶ Tajné ocenění předmětu kupujícím je fenomén aukcí a současně základní stavební kámen mechanism designu.

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

- ▶ Prodávající neočekává, že by za věc dostal víc než je $\max_{i \in Q} [x_i]$ (obecně vzato).
- ▶ **Z toho plyne, že jeho hlavním zájmem je zjistit hodnoty x_i hráčů.**
- ▶ Toto ovšem zajímá i samotné hráče – pokud hráči zjistí x_i svých protihráčů, pak mohou **strategicky ovlivnit své sázky**.

Jak se bude chovat hráč v těchto dvou situacích:

- ▶ Vyhraje nejvyšší nabídka, ale nic se neplatí. Logicky pak hráč vsadí $x'_i \gg x_i$ libovolně vysoké.
- ▶ Vyhraje nejvyšší nabídka, ale něco se zaplatí – y . Hráč se tedy bude snažit maximalizovat $x_i - y$. Zřejmě nevsadí částku větší než x_i .

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

Notace:

- ▶ x_i – **tajné** ocenění předmětu aukce kupujícím $i \in Q$.
- ▶ b_i – sázka (nabídka, angl. bid) podaná kupujícím v aukci (množina všech možných sázek je jeho množinou strategií).
- ▶ y_i – částka, kterou zaplatí hráč (účastník aukce) na konci aukce (existují mechanismy, kdy obecně platí každý).

Hráč-kupující si cení předmět aukce na x_i , ale vsadí $b_i \leq x_i$, aby v ideálním případě zaplatil $y_i \leq b_i$.

Hráč-prodávající nezná cenu předmětu a volí mechanismus aukce tak, aby získal v ideálním případě $\max_i [x_i]$. **Je to možné?**

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

Tajné ocenění předmětu aukce je privátní informací ve hře (hrajeme hru s neúplnou informací). Hráči si modelují názor na x_i protivníků pravděpodobnostním rozložením – distribuční funkcí

$$F(x) : \langle 0, \omega \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

Zkoumají pak složenou distribuční funkci

$$G(x) \equiv F(x)^{N-1}$$

My nebudeme chtít zabřednout do analýzy spojitých distribučních funkcí a pravděpodobností. Ukážeme si pouze výsledná ekvilibria.

Bude pro nás důležité, že hráči jsou symetričtí ve svém názoru na ohodnocení (řídí se u všech stejným rozložením). Povede to na symetrická ekvilibria.

- ▶ Vítězem se obvykle stává hráč s nejvyšší nabídkou (standardní aukce). Úměrně tomu i zaplatí.
- ▶ Zatím bez znalosti modelů aukcí.
- ▶ Předpokládáme, že $b_i \leq x_i$. Klíčové bude správně určit x_i .
- ▶ Mnohdy se stane, že hráč vyhraje, ale pak není rád (příliš mnoho zaplatí, předmět se ukáže méně hodnotný, ...).
- ▶ Ocenění ropných vrtů, licencí na provozování (např. sítí), ocenění akcií, ...

Pozn.: velmi slavná je situace aukčního prodeje licencí na provozování 3G-mobilních sítí. Většinu evropských telefonních operátorů tato aukce téměř ekonomicky zlikvidovala [Klemperer].

Aukce o 3G licence v Evropských zemích [Klemperer]

Výnos z aukce vyjádřený v eurech na hlavu (občana).

	rok 2000		rok 2001
Rakousko	100	Belgie	45
Německo	615	Dánsko	95
Itálie	240	Řecko	45
Holandsko	170		
Švýcarsko	20		
Velká Británie	650		

Švýcarsko: zvolilo anglickou aukci (inspirace z výsledků UK), na počátku bylo 9 zainteresovaných kupujících a v prodeji 4 licence. Po výsledku aukce v Itálii ovšem slabší hráči odpadli a zůstali 4 hráči (na 4 licence!!!). Nakonec se ukázalo, že příslušné ministerstvo nasadilo velmi nízkou "reserve price" (minimální výslednou hodnotu), takže hráči fakticky mohli utvořit koalici a zařídit se dle známých teorií.

Co jsou pravidla aukce?

V čem spočívá ten *mechanismus*?

Tvůrce aukce specifikuje pravidla týkající se:

- ▶ Způsobu podávání nabídek (sázek) – jedna sázka (obálková metoda, angl. sealed-bid auction), postupné přihazování.
- ▶ Způsobu interakce mezi hráči – veřejně nebo tajně podávané nabídky.
- ▶ Způsobu volby vítěze aukce – např. hráč s nejvyšší nabídkou (pokud je nabídka pouze jednorozměrná).
- ▶ Způsobu zaplacení za účast v aukci – vstupní poplatek, platba za výsledek aukce.
- ▶ Probereme základní mechanismy intuitivně, pak Revenue Equivalence Theorem a VCG-mechanismus.

Tradiční aukční principy – Anglická aukce (ascending auction)

- ▶ Asi nejznámější forma aukce.
- ▶ Hráči se sejdou na veřejném místě, kde proběhne aukce.
- ▶ Prodávající stanoví vyvolávací cenu.
- ▶ Hráči cenu potvrdí svým zájmem, případně sekvenčně cenu navyšují. Nabídky podávají veřejně.
- ▶ Hráč i s podanou nejvyšší nabídkou b_i^m se stane vítězem aukce.
- ▶ Vítěz aukce i zaplatí b_i^m . Ostatní neplatí nic.

Zřejmě nejoblíbenější mechanismus veřejné aukce. Je považován za nejférovější. Ukážeme si, že (teoreticky) nevede k maximálnímu výnosu z aukce.

Všimněme si, že každý hráč může přihodit libovolně malé Δ , aby navýšil předchozí nabídku. Vyplyne z toho, že **vítěz platí cenu, která se fakticky rovná druhé nejvyšší nabídce.**

Anglická aukce - platba

Vítěz aukce:

$$i^* = \arg \max_{i \in Q} [b_i]$$

Platba hráčů za účast v aukci:

$$y_i = \begin{cases} b_i & i = i^* \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Zisk hráče z aukce:

$$u_i = \begin{cases} x_i - b_i & i = i^* \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Výnos z aukce:

$$u^* = b_{i^*}$$

Anglická aukce v podání E-bay

- ▶ Hráč stanoví svou pracovní maximální nabídku b_i^m .
- ▶ Aukční arbitr (robot) nastavuje automaticky stav aktuální nejvyšší nabídky b^M s příchodem nové nabídky
 - ▶ b^M je druhá nejvyšší nabídka plus Δ .
 - ▶ Postupným přihazováním pouze zjistím dočasně nejvyšší předchozí nabídku protihráče.
- ▶ Aukce končí vypršením časového limitu s výslednou cenou b^M . Zřejmě vítěz aukce nastavil $b_i^m \geq b^M$.
- ▶ Vítěz tedy platí druhou nejvyšší cenu. Je to elektronická forma anglické aukce.
- ▶ Rozšiřující atributy: reserve price (je tajná až do okamžiku jejího překročení (?)).

Racionální chování v e-bay aukci: zvolte si opravdové (naprosto pravdivé a realistické) vaše ocenění zboží x_i , nastavte $b_i^m := x_i$ a dál se na aukci raději nedívejte.

Holandská aukce (descending auction)

- ▶ Byla zavedena na trzích s květinami (používáno u "spěchajících" komodit – např. ryby).
- ▶ Prodávající ohlásí vyvolávací (počáteční) cenu b^0 . Nechť $k = 0, 1, \dots$ označuje aktuální kolo aukce.
- ▶ Pokud existuje kupující, který za tuto cenu b^k chce koupit (stane se vítězem), aukce končí a kupující zaplatí b^k .
- ▶ Jinak prodávající sníží cenu b^k o Δ a v dalším kole ohlásí cenu $b^{k+1} = b^k - \Delta$.

Tato aukce je velmi účinná.

Otázka: bude kupující reagovat v kole k , kdy $b^k \approx x_i$? Co by tím získal? Hráči zřejmě nechají cenu "vhodně" klesnout pod x_i .

All-pay auction

- ▶ Hráči vsadí svoje sázky b_i .
- ▶ Vítězí klasicky nejvyšší sázka $\max_i [b_i]$.
- ▶ Každý ovšem zaplatí svou sázku $y_i = b_i$.
- ▶ Modeluje často reklamu, lobbying, předvolební kampaně (vše s charakterem Vězňova dilematu).
- ▶ Racionální chování v této aukci: pokud se do aukce dám, pak je pro mě racionální vsadit absolutní maximum $b_i = x_i$.
- ▶ Důkaz [Krishna, p.32]

Je tu jistá podobnost s "Shubikovou aukcí o dolar" (model investování do něčeho). Hráči nejsou schopni odhalit okamžik, kdy je lépe přiznat ztrátu a odstoupit z aukce.

Pozn.: Obskurní formy "aukcí" – bonus.cz

Základní formy aukcí

- ▶ Veřejná vzestupná dražba – anglická aukce. Japonská aukce.
- ▶ Veřejná sestupná dražba – holandská aukce.
- ▶ Tajná dražba s první cenou (First-Price Sealed-bid Auction).
- ▶ Tajná dražba s druhou cenou (Second-Price Sealed-bid Auction).

Jsou některé z nich strategicky ekvivalentní (z pohledu kupujícího)?

Theorem

Veřejná sestupná dražba (holandská aukce) je ryze strategicky ekvivalentní s tajnou dražbou s první cenou.

Veřejná vzestupná dražba (anglická aukce) je slabě strategicky ekvivalentní s tajnou dražbou s druhou cenou.

Důkazy vyplynou z další slajdů.

Ekvilibrium v základních aukcích

- ▶ Veřejné aukce nás nyní strategicky nezajímají (anglická vůbec ne, holandská v podání tajné s 1st cenou).
- ▶ Známe (předpokládáme) strategickou ekvivalenci mezi veřejnými a tajnými aukcemi.
- ▶ Ukážeme si ekvilibrium (tzn. Nashovo) v tajných aukcích (first-price, second-price).
- ▶ Strategicky jednodušší je second-price aukce.
 - ▶ Ukážeme, že je strategicky nemanipulovatelná (Vickrey).
 - ▶ Ukážeme, že hráči nemusí zkoumat tajné ohodnocení x_i svých protihráčů
 - ▶ Ukážeme, že má nejvyšší výnos (až na revenue-equivalence theorem).
 - ▶ Je základem multi-object aukcí s marginální cenou (market-clearing price).

Definition

Uvažujme množinu hráčů N a vektor $(x_i)_{i \in N}$ jejich tajných ohodnocení předmětu aukce.

Aukční mechanismus je strategicky nemanipulovatelný, pokud žádný hráč i jednotlivě nezlepší svůj výsledek (rozdíl mezi příjmem a platbou), když podá sázku jinou než je x_i .

Podobně v ostatních částech Mechanism designu: skutečná preference, prezentovaná preference, výsledek mechanismu, užitek pro hráče.

Definition

Aukce s jedním nedělitelným předmětem koupě je strategická situace s N hráči (množina hráčů Q), kde každý hráč má pro předmět aukce své tajné privátní ohodnocení x_i . Mechanismus aukce specifikuje volbu vítěze aukce i^* a částku, kterou každý hráč musí zaplatit y_i .

Za standardní aukci považujeme aukci, kde vítězem je hráč s nejvyšší podanou nabídkou (a hráč s nulovou sázkou platí 0).

Z pohledu Mechanism design je volba vítěze (a platby hráčů) mechanismem specifikovaným Funkcí veřejné volby (social choice function).

Tajná aukce s druhou cenou (Vickrey auction)

Hráč se stane vítězem, pokud nabídne nejvyšší cenu.

Definition

Nechť je vítězem aukce hráč i s nejvyšší deklarovanou cenou b_i a nechť zaplatí druhou nejvyšší deklarovanou cenu

$$y^* = \max_{j \in Q \setminus \{i\}} [b_j]$$

Deklarovaná cena: $b_i = x_i$.

Theorem

Pro každou sázku $b_1, b_2, \dots, b_N$ a každou jinou b'_i , nechť u_i je užitek i -tého hráče při hraní b_i a u'_i je jeho užitek při hraní b'_i . Pak $u_i \geq u'_i$.

William Vickrey (1960)

William Vickrey – Nobelova cena (1996). Hráč je tedy na tom **slabě lépe**, pokud sází své pravdivé ohodnocení předmětu aukce.

Rothkopf, M.H., 2007. Thirteen Reasons Why the Vickrey-Clarke-Groves Process Is Not Practical. Operations Research, 55(2), pp.191–197.

Důkaz Vickreyova teorému

Proof.

Předpokládejme, že hráč i při své sázce b_i vyhraje a zaplatí (druhou nejvyšší) cenu y^* . Jeho zisk je tedy $u_i = b_i - y^* \geq 0$. Při možné manipulaci $b'_i > y^*$, i je stále vítězícím hráčem a $u'_i = u_i$. V druhém případě, kdy $b'_i < y^*$, i prohraje a $u' = 0 \leq u$.

Pokud hráč i při sázce b_i prohraje, pak $u_i = 0$. Pak je vítěz $j \in Q; j \neq i$ se sázkou $b_j \geq b_i$ (nebo lépe $b_j > b_i$). Pro $b'_i < b_j$ hráč i stále prohrává a $u'_i = 0$. Pro $b'_i \geq b_j$ (nebo striktně vyšší), i vyhrává a platí $y^* = b_j$, ale jeho zisk je $u'_i = b_i - b_j \leq 0$, tzn. $u'_i \leq u_i$. □

Historicky první sealed-bid 2nd price aukce

Korespondenční aukce známek, 1893, Wainwright & Lewis, of Northampton, Massachusetts (citováno z David Lucking-Reiley: Vickrey Auctions in Practice: From Nineteenth Century Philately to Twenty-first Century E-commerce).

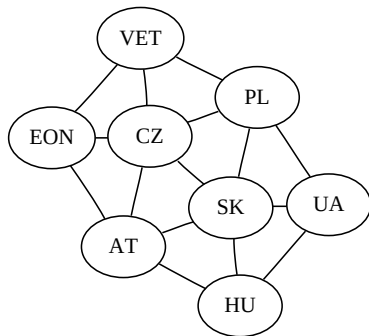
Catalogue of a Collection of U.S. and Foreign Stamps To be sold WITHOUT RESERVE except where noted. Bids will be received up to 4 P.M., May 15, 1893. Bids are for the LOT, and, contrary to the usual custom in sales of this kind, we shall make this a genuine AUCTION sale; that is to say, each lot will be sold at an advance of from 1c to 10c above the second highest bidder. Address all bids to Wainwright & Lewis, Northampton, Mass.

Výběrová řízení na dodávku ...

- ▶ Výběrová řízení (klient, dodavatelé) jsou také aukce – např. pohotovost v točivých rezervách (ČEPS).
- ▶ Běžně nebývá pak kontraktovaná cena dodržena (stavby).
- ▶ Modelem toho může být aukční mechanismus demonstrováný M. Shubikem (dollar auction, 1971, Journal of Conflict Resolution).
- ▶ Předpokládejme aukci, kdy vítěz zaplatí svou cenu, ale svou nabídnutou cenu zaplatí i hráč na druhém místě.
- ▶ Jak by potom dopadla "dollar auction"? Při reálném experimentu [Shubik] byl dolar vydražen za 3.xx dolary.
 - ▶ Shubikova aukce modeluje "přepacení" u investorských projektů (stavby, vývoj Concorde)
 - ▶ Současně je vysvětlením mnoha společensko/psychologických jevů, kde se účastník aukce stane "zajímavým" a nutí ho to dále investovat (sledování TV pořadů).

- ▶ Předpokládejme n kusů (kapacity) zboží v aukci.
- ▶ Hráči podávají nabídky ve formátu (množství, cena)
- ▶ Nabídky jsou seřazeny sestupně podle ceny a jsou zobchodovány až do kapacity n .
- ▶ Kolik vítězní hráči zaplatí? Svoji cenu nebo jednotnou (marginální, market-clearing price) cenu.
- ▶ Aukce s marginální cenou je multi-object varianta Vickreyovy aukce (2nd price, po zobecnění VCG mechanismus).
- ▶ Běžně aukce na dodávku elektřiny, nákup přeshraničních profilů (hráči tvořící marginální cenu, hráči sázející limitní cenu).
 - ▶ Na těchto trzích probíhá už opravdový "gambling".

Příklad komplikovanější aukce – FlowBased-aukční mechanismus



- ▶ Předpokládejme aukci o přeshraniční elektrické vedení mezi dvěma zeměmi $t_f \rightarrow t_t$.
- ▶ Předpokládejme fyzikální zákony toku elektřiny v obvodu.
- ▶ Je zaveden centralizovaný aukční systém na přidělování přenosové kapacity.

Ekvilibrium v aukci s první cenou

Tajná aukce s první cenou (nebo ekvivalentní Holandská veřejná aukce) je strategicky náročnější než Vickreyovské mechanismy.

Hráč zřejmě nebude sázet $b_i = x_i$, protože by nikdy nedosáhl $u_i > 0$. Nejspíš bude jeho sázka záviset na odhadu ocenění x_j jeho protivníky.

Předpokládáme: Hráči oceňují věc v intervalu $\langle 0, \omega \rangle$. Ohodnocení věci hráči je dáno distribuční funkcí F na intervalu $\langle 0, \omega \rangle$.

Předpokládáme symetrii mezi hráči, tzn. F je pro všechny hráče stejná a F je common knowledge.

Theorem

Mějme N nezávislých hráčů s privátním ohodnocením x_i , které je rovnoměrně distribuováno na $\langle 0, \omega \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:

$$\beta^I(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Důkaz [Krishna] (projekty).

Toto symetrické Nashovo eq. předpokládá risk-neutral hráče (to zatím nezkoumáme).

Příklad: Ekvilibrium v aukci s první cenou

Předpokládejme tajné symetrické ohodnocení předmětu rovnoměrným pravděpodobnostním rozložením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Pokud je mé ohodnocení např. $x_1 = 0.8$ a $N = 2$, pak je můj očekávaný zisk dán:

b_1	$\pi_1 = \text{pravděpodobnost výhry} * u_1$
0.8	$0.8 * 0$
0.7	$0.7 * 0.1 = 0.07$
0.6	$0.6 * 0.2 = 0.12$
0.5	$0.5 * 0.3 = 0.15$
0.4	$0.4 * 0.4 = 0.16$
0.3	$0.3 * 0.5 = 0.15$
0.2	$0.2 * 0.6 = 0.12$

Ekvilíbrio v aukci s první cenou II.

Theorem

Mějme N nezávislých hráčů s privátním ohodnocením x_i , které je exponenciálně distribuováno na $\langle 0, \infty \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:

Je-li $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ pro $\lambda > 0$, $N = 2$, pak:

$$\beta^I(x) = \frac{1}{\lambda} - \frac{x \exp(-\lambda x)}{1 - \exp(-\lambda x)}$$

- ▶ Vliv rizika na chování hráčů – jak hráči chápají své riziko v aukci (riziko neúspěchu).
- ▶ Revenue Equivalence Theorem – za jistých okolností (vztaženo k riziku) jsou všechny základní aukce strategicky ekvivalentní (návrhář mechanismu si zjednoduší práci).
- ▶ Vickrey-Clarke-Groves mechanismus – matematické základy "Vickrey auction".

- ▶ Risk-neutral, Risk-averse (nesnáší riziko), Risk-seeking (vyhledává riziko).
- ▶ Risk-averse hráč nemá vztah mezi ziskem a užitkem lineární.
- ▶ Příklad: Je nabídnuto 50 peněz nebo 50% získání 100 peněz. Risk-averse hráč vezme 50 peněz, risk-seeking hráč vezme šanci 50% na získání 100 peněz a risk-neutral je indiferentní mezi oběma.
- ▶ Prodávající (návrhář mechanismu) by si měl všimnout vztahu kupujících k riziku, protože v případě 1st-aukce má význam pro volbu $\beta^I(x)$.

Ekvilibrum v aukci s první cenou s ohledem na riziko

Přístup k $\beta^I(x)$ je pro hráče volbou jeho strategie. Profil $(\beta^I(x_1), \beta^I(x_2), \dots)$ je NE, protože žádný hráč nezvýší svůj užitek volbou jiného přístupu.

Ekvilibrum pro risk-neutral hráče (pouze maximalizují zisk):

$$\beta^I(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Ekvilibrum pro risk-averse hráče s koeficientem $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ nebo $\alpha = 1$.

$$\beta^I(x) = x^\alpha$$

Ekvilibrum pro risk-seeking hráče: (najděte v literatuře, projekty)

Revenue Equivalence Principle

- ▶ Známe racionální chování kupujících v aukci – tzn., jakou mají zvolit strategii v zadaném aukčním mechanismu.
- ▶ Jaká je ovšem pozice prodávajícího? Volba pravidel aukce je způsobem jeho strategického rozhodování.
- ▶ I prodávající přemýšlí o situaci: jaké ohodnocení mají hráči?
Jaký mají vztah k riziku?

- ▶ Revenue = výnos aukce pro prodávajícího.
- ▶ Budeme předpokládat *standardní aukce* – aukce, kde vítěz je ten, co vsadil nejvíc (opačným příkladem je loterie s losy, kde se šance zvítězit zvyšuje s počtem zakoupených losů, ale vítěz může být kdokoliv).

Ukážeme, že za jistých okolností (nepříliš nepravděpodobných) jsou všechny aukční mechanismy ekvivalentní z pohledu výnosu aukce (zaručují shodný očekávaný výnos aukce).

Revenue Equivalence Principle

Porovnejme 1st a 2nd price aukce, kde jsou dva hráči s ohodnoceními a a b , a, b je rovnoměrně rozloženo na $\langle 0, 1 \rangle$.

Výnos $y_{II}^* = \min(a, b)$ a $y_I^* = \max(a/2, b/2)$.

Jaké jsou ovšem očekávané (pravděpodobnostní) výnosy?

$$E(y_{II}^*) = E(y_I^*) = \frac{1}{3}$$

Theorem

*Předpokládejme risk-neutral hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, aukce je standardní a zaručuje nulovou platbu hráči deklarujícímu nulové ohodnocení. Pak je **výnos aukce při aukci s první cenou shodný s aukcí s druhou cenou.***

Obecně vzato pak nezáleží na typu aukčního mechanismu. Průměrný očekávaný výnos z aukce bude vždy stejný.

Hrají-li risk-neutral hráči, je z hlediska očekávání výnosu jedno, zda volíme 1st nebo 2st price aukci.

Rozdíl výnosů mezi 1st a 2nd price aukcemi při risk-averse hráčích

Theorem

Předpokládejme risk-averse hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, pak je výnos aukce při aukci s první cenou vyšší než u aukce s druhou cenou.

Hrají-li risk-averse hráči, je lépe volit 1st price aukci.

Vickrey-Clarke-Groves mechanismus

- ▶ W. Vickrey v roce 1961 publikoval návrh aukce s druhou cenou, kde ukázal, že je nemanipulovatelná (hráč deklarující nepravdivé ohodnocení předmětu nezíská víc).
- ▶ Clarke (1971) a Groves (1973) tuto myšlenku zobecnili do VCG-mechanismu.
- ▶ Budeme VCG-mechanismus definovat.
- ▶ Ukážeme, že je strategicky nemanipulovatelný.
- ▶ Ukážeme aplikace.

Předpokládejme množinu alternativ A .

Každý hráč deklaruje svou ohodnocovací funkci

$$v_i : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Hráč dává funkcí v_i veřejně najevo, jak si cení jednotlivé alternativy $a \in A$.

Množina všech ohodnocovacích funkcí hráče je V_i (je to totožné s S_i u strategických her). **Může nám sdělit libovolný postoj $v_i \in V_i$, my chceme jeho pravdivý postoj.**

Dále definujeme $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ jako profil, $v \in V$, $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_N$. Podobně chápeme V_{-i} a v_{-i} .

Mechanismus (direct revelation)

Definition

Mechanismus je dán funkcí veřejné volby $f : V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow A$ a vektorem plateb $p_1, \dots, p_N$, kde $p_i : V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow \mathbb{R}$ je částka, kterou zaplatí hráč i .

Pak průběh:

- ▶ Hráči sdělí své ocenění, tzn. postoj $v_i \in V_i$ vůči různým alternativám $a \in A$.
- ▶ Funkce veřejné volby rozhodne, která alternativa $a \in A$ se zvolí.
- ▶ Určí se pro každého hráče $i \in Q$, kolik zaplatí – $p_i : V_1 \times \dots \times V_N$.

Nemanipulovatelnost mechanismu

Definition

Mechanismus $(f, p_1, \dots, p_N)$ se nazývá **nemanipulovatelný** (incentive compatible, strategy-proof), pokud pro každého hráče i , pro každý profil $v \in V$ (pravdivé ohodnocení) a každé $v'_i \in V_i$, pokud víme, že $a = f(v_i, v_{-i})$ a $a' = f(v'_i, v_{-i})$, pak platí

$$v_i(a) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(a') - p_i(v'_i, v_{-i})$$

Stále dokola: pokud hráč říká pravdu, není na tom hůř než když lže.

Kde je zdroj manipulace?

Co nám to může připomínat?

Hledáme takovou funkci veřejné volby f , aby v dané situaci vybírala veřejné optimum, tzn. $\max_{a \in A} \sum_i v_i(a)$.

Definition

Mechanismus $(f, p_1, \dots, p_N)$ se nazývá Vickrey-Clarke-Groves mechanismus (VCG), pokud:

- ▶ f maximalizuje společenský užitek, tedy

$$f(v_1, \dots, v_N) \in \arg \max_{a \in A} \left[\sum_i v_i(a) \right]$$

- ▶ pro sadu funkcí $h_1, \dots, h_N$, kde $h_i : V_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$, definujeme

$$p_i(v_1, \dots, v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_N))$$

$$p_i(v_1, \dots, v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_N))$$

Jinak řečeno, platba za účast ve hře je dána složkami:

- ▶ $h_i(v_{-i})$, tedy platby, o které rozhodne mechanismus z kontextu v_{-i}
- ▶ $-\sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_N))$, tedy slevou hodnoty, kterou protihráči deklarují jako jejich přínos z volby vítězné alternativy.

Theorem

Každý VCG-mechanismus je strategicky nemanipulovatelný.

Hráč, který deklaruje nepravdivé ohodnocení, nezíská víc.

Jak může hráč manipulovat volbu? Svou deklarací $v_i \in V$: snaha o ovlivnění prvního a druhého členu platby.

Důkaz [Nisan, p. 219]

Trochu jsme odsunuli problém jeho převedením na formulaci funkcí $\{h_i(v_{-i})\}_{i \in Q}$.

Definition

- ▶ Mechanismus je (ex-post) individuálně racionální, pokud hráči vždy získají kladný zisk (tedy i nulový). Formálně, pro všechny $v \in V : v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0; \forall i \in Q$.
- ▶ Mechanismus nemá žádné postranní platby, pokud žádný hráč platbou nezíská. Formálně, $\forall v \in V : \forall i \in Q : p_i(v) \geq 0$ (p_i nedává záporné hodnoty platby).

Hráč i účastí ve hře získává $u_i(v) = v_i(f(v)) - p_i(v)$, tzn. jak si cení výsledku $f(v)$ po odečtu platby $p_i(v)$.

Clarke Pivot Rule

Definition

Clarke pivot platba je

$$h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \left[\sum_{j \neq i} v_j(b) \right]$$

Potom je platba hráče v profilu $v \in V$ dána

$$p_i(v) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

kde $a = f(v)$.

Hráč zaplatí do systému částku, která se rovná celkové škodě, kterou ostatním způsobil.

Lemma

VCG mechanismus s Clarke pivot platbou nezpůsobuje žádné postranní platby. Pokud je $v_i(a) \geq 0$ pro všechny $v_i \in V_i$ a $a \in A$, pak je také individuálně racionální.

VCG mechanismus – single-object aukce

- ▶ $A = \{wins_i | i \in Q\}$ – kdo má vyhrát.
- ▶ Každý hráč hodnotí své vítězství kladně, vítězství jiného nulově:
- ▶ $V_i = \{v_i | v_i(wins_i) \geq 0; \forall j \neq i : v_i(wins_j) = 0\}$
- ▶ Pokud má hráč v plánu deklarovat pouze cenu x_i , pak je $v_i(wins_i) = x_i, v_i(wins_j) = 0 \quad \forall j \neq i$. Jinak může deklarovat další funkce $v_i^1, v_i^2, \dots$
- ▶ VCG mechanismus s Clarkovým pivotem nám dává přesně Vickreyovu aukci.

VCG mechanismus – single-object aukce

Mějme situaci tří hráčů, tzn. $A = \{1, 2, 3\}$, kde $x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 4$. Následuje jeden možný profil v :

i/A	1	2	3
$v_1(a)$	10	0	0
$v_2(a)$	0	15	0
$v_3(a)$	0	0	4

$f(v) = 2$ je zvolena alternativa "vyhrál 2". Platby hráčů jsou:

$$p_1(v) = \max[0, 15, 4] - 15 = 0$$

$$p_2(v) = \max[10, 0, 4] - 0 = 10$$

$$p_3(v) = \max[10, 15, 0] - 15 = 0$$

Zkusme to manipulovat. Hráč 2 nezlepší svůj výsledek manipulací.

Zkusme hráče 1: a) $v_1(1) = 16$, b) $v_1(2) = 5$, c) $v_1(2) = -6$.

VCG mechanismus – stavba veřejně prospěšného objektu

Vláda plánuje zbudovat objekt o stavebních nákladech C , pokud $\sum_i v_i > C$.

- ▶ Předpokládáme hráče $v_i \geq 0$, ale je přípustné i $v_i < 0$
- ▶ Problémem je oznámit pivotní pravidlo takové, aby hráči měli potřebu pravdivě deklarovat svá v_i
- ▶ Clarke pivot: hráč i s $v_i \geq 0$ zaplatí nenulovou částku pouze tehdy, je-li pivotním hráčem, tzn.:
- ▶ $\sum_{j \neq i} v_j \leq C$ a současně $\sum_{j \in Q} v_j > C$. V takovém případě zaplatí $p_i = C - \sum_{j \neq i} v_j$.
- ▶ Hráč se záporným ohodnocením zaplatí nenulovou částku pouze, když $\sum_{j \neq i} v_j > C$ a $\sum_j v_j \leq C$, pak $p_i = \sum_{j \neq i} v_j - C$.

Bohužel vždy bude platit $\sum_i p_i < C$.

VCG mechanismus – stavba veřejně prospěšného objektu

Situace je jiná, než u příkladu se Shapleyho hodnotou (tady hráči nemusí dát v sumě C). Mějme tři hráče $v_1 = 10$, $v_2 = 5$, $v_3 = 4$, $C = 17$.

$$p_1 = 17 - 9 = 8$$

$$p_2 = 17 - 14 = 3$$

$$p_3 = 17 - 15 = 2$$

$$\sum_j p_j = 13$$

Mechanismus je odolný proti manipulaci, neboť pokud $v'_1 = 8$, pak $p'_1 = 17 - 9$. Při $v''_1 = 7$ se stavba již nepostaví.

Jak to dopadne při $v = (20, 5, 1)$?

Další příklady kap. 9.3.5. [Nisan, s. 220]. Model: cost-sharing.

- ▶ Third-price auction.
- ▶ Nesymetrické distribuční funkce ohodnocení hráči.
- ▶ Modelování risk-averse hráčů.
- ▶ Multi-object aukce.

- ▶ Evoluční teorie her.
- ▶ Case-study: modelování energetických trhů v ČR a střední Evropě.
- ▶ Závěrečné opakování.