THE: Nekooperativní hry s nulovým součtem
Non-Cooperative Zero-sum Games

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

October 19, 2022

Úvod

Čerpáno z:

- Fudenberg, D., Tirole, J.: Game Theory, MIT Press, 1991
- Osborne, M., Rubinstein, A.: A Course in Game Theory, MIT, 1994
- Magdaléna Hykšová: Přednášky z teorie her, Fakulta dopravní ČVUT
- Glicksman, A.M.: Introduction to Linear Programming and the Theory of Games, Dover Publications, 2001
- Dorfman, R., Samuelson, P.A., Solow, R.M.: Linear Programming and Economic Analysis, Dover Publications

Úvod

- Jsou situace, kdy výhra jednoho znamená prohru druhého, resp. míra výhry značí míru prohry.
- Stále předpokládáme, že hráči spolu nekomunikují a nespolupracují, tzn. předpokládáme nekooperativní hraní hry.
- Nekooperativnost v názvu této přednášky ovšem nemá smysl zdůrazňovat, neboť tyto hry bývají často nazývány *striktně kompetetivní hry* (strictly competitive games).
  - Preference hráčů jsou naprosto opačné.
- Ve hrách s nulovým součtem (0-sum hry/games) jeden hráč bude maximalizovat výhru a druhý minimalizovat ztrátu (neznamená to ovšem, že jeden – např. řádkový – vždy vyhrává a druhý vždy prohrává).
- Výhra a prohra je jenom způsob notace.

Koncept 0-sum her vyvinul především John von Neumann a publikoval v knize s Oskarem Morgensternem: Theory of Games and Economic Behavior, 1944

Matching pennies

A/B	heads	tails	
heads	1,-1	-1,1	p
tails	-1,1	1,-1	$1-p$
	q	$1-q$	

Nulová suma:

A/B	heads	tails
heads	0	0
tails	0	0

Taky můžeme zapsat (zisk sloupcového je $U_B(s) = -U_A(s)$):

A/B	heads	tails
heads	1	-1
tails	-1	1

Antagonistický konflikt

Definition

Antagonistický konflikt je rozhodovací situace N hráčů, kteří se po volbě svých rozhodnutí rozdělí o pevně stanovenou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili.

Matematickým modelem antagonistického konfliktu je hra s nulovým/konstantním součtem (nulový/konstantní součet modeluje onu "pevně stanovenou částku").

Příklady: sportovní zápasy a hry, dělení konečného majetku/zdrojů, ekonomické modely (dřív se věřilo, že ekonomika je 0-sum hra).

Antagonistický konflikt

Představa win-loose hry je pochopitelně nepříjemná. Čím složitější svět je, tím více je nadějí na provázání potřeby jeden druhému vyhovět:
The more complex societies get and the more complex the networks of interdependence within and beyond community and national borders get, the more people are forced in their own interests to find non-zero-sum solutions. That is, win–win solutions instead of win–lose solutions.... Because we find as our interdependence increases that, on the whole, we do better when other people do better as well — so we have to find ways that we can all win, we have to accommodate each other.... Bill Clinton, Wired interview, December 2000.

Příklad: jednoduchý model konkurence

- Dvě firmy na trhu s minerální vodou (Perrier, Apollinaris).
- Rozhodnutí zvolit vysokou cenu ($2) nebo nízkou cenu ($1).
- Při ceně $2 se prodá 5000 lahví (tržba $10.000).
- Při ceně $1 se prodá 10000 lahví (tržba $10.000).
- Při stejné ceně obou se hráči rovnoměrně podělí o trh. Pokud je jeden levnější, získá celý trh.
- Fixní náklady (bez ohledu na realizovanou produkci/prodej) jsou $5000.

Perrier/Appollinaris	$1	$2
$1	0,0	5000,-5000
$2	-5000,5000	0,0

Poznámka: poněkud sofistikovanější přístup provedeme příště u Cournotova modelu oligopolu.

Nulový versus Nenulový součet formálně

Definition

Mějme hru Γ. Řekneme, že Γ je hra s konstantním součtem $k \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$\forall s \in S : \sum_{i \in Q} U_i(s) = k$$

Pokud je $k = 0$, pak je Γ hra s nulovým součtem.

Hry s nulovým součtem bývají pro svůj strategický charakter nazývány *strictly competitive games*. Míra výhry jednoho značí míru prohry druhého.

Chápeme, že konstantní součet musí platit pro všechny strategické profily. Opakem je jasně hra s nenulovým/nekonstantním součtem.

Vztah nulového a konstantního součtu

Theorem

Nechť Γ_k *je hra s konstantním součtem* $k \in \mathbb{R}$. *Potom existuje hra* Γ_0 *s nulovým součtem taková, že je strategicky ekvivalentní s* Γ_k.

Předvedení věty bude založeno na nalezení A_i, B_i koeficientů pro strategickou ekvivalenci.

(Strategická) ekvivalence her

Definition

Hra $\Gamma = (Q, \{S_i\}_{i\in Q}, \{U_i\}_{i\in Q})$ je ekvivalentní s hrou $\Gamma' = (Q, \{S_i\}_{i\in Q}, \{U'_i\}_{i\in Q})$, pokud existují pro každého hráče $i \in Q$ reálná čísla A_i, B_i, kde $A_i > 0$ a platí $\forall s \in S$:

$$U'_i(s) = A_i U_i(s) + B_i$$

Tzn, pokud ke hře připočtu nějaké číslo, strategický charakter hry se nezmění.

Strategický charakter hry se nemění při lineárních transformacích užitkových funkcí.

Příklad: převod k-sum hry na 0-sum hru

	a	b
c	0,2	1,1
d	-1,3	2,0

A_1, A_2, B_1, B_2 jsou neznámé

$$\begin{array}{ll} U'_{11} = 0A_1 + B_1 & U'_{21} = 2A_2 + B_2 \\ U'_{12} = A_1 + B_1 & U'_{22} = A_2 + B_2 \\ U'_{13} = -A_1 + B_1 & U'_{23} = 3A_2 + B_2 \\ U'_{14} = 2A_1 + B_1 & U'_{24} = 0A_2 + B_2 \end{array}$$

$U'_{ij}; i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3,4\}$ jsou taky neznámé (zatím 12 neznámých, 8 rovnic). Dále

$\forall j \in \{1,2,3,4\} : U'_{1j} + U'_{2j} = 0$

$B_1 + 2A_2 + B_2 = 0$
$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0$
$-A_1 + B_1 + 3A_2 + B_2 = 0$
$2A_1 + B_1 + B_2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Máme homogenní soustavu rovnic, kde jsou ovšem lineární závislosti, tzn. vede na nekonečně mnoho řešení (to nás nepřekvapuje, neboť to očekáváme).
Navrhněme $A_1 = A_2 = 1$, tzn.:
$B_1 + B_2 = -2$
zvolme $B_1 = B_2 = -1$

Příklad: převod k-sum hry na 0-sum hru

	a	b
c	0,2	1,1
d	-1,3	2,0

$A_i = 1, B_i = -1 \Rightarrow$

	a	b
c	-1,1	0,0
d	-2,2	1,-1

Příklad: převod k-sum hry na 0-sum hru

	a	b
c	0,2	1,1
d	-1,3	2,0

$A_i = 1, B_1 = 0, B_2 = -2 \Rightarrow$

	a	b
c	0,0	1,-1
d	-1,1	2,-2

Příklad: převod k-sum hry na 0-sum hru

Funguje to i pro hru s nenulovým součtem?

	a	b
c	1(byla 0),2	1,1
d	-1,3	2,0

Pak řešení:
$A_i = 0, B_1 = -B_2$
To nevyhovuje definici strategické ekvivalence (např. $B_1 = 1, B_2 = -1$):

	a	b
c	1,-1	1,-1
d	1,-1	1,-1

Maticové hry

Zavedeme pojem *maticová hra*.

- Častý pojem v TH literatuře.
- Hru n hráčů vyjadřujeme jako n-rozměrnou matici (vyjádření výplatních funkcí).
- Bi-matrix hry (dvoumaticové hry) jsou velmi typické.
- Zápis můžeme rozložit do dvou matic, kde M_i vyjadřuje $U_i, i \in Q$.

A/B	c	d
e	1,2	3,4
f	5,6	7,8

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Zápis 0-sum hry

- Pokud platí, že $\forall s \in S : U_1(s) + U_2(s) = 0$, pak lze psát pouze jednu matici $U(s)$
- a definovat $U_1(s) = U(s)$
- $U_2(s) = -U(s)$

2,-2	5,-5	0,0
3,-3	1,-1	2,-2
4,-4	3,-3	6,-6

$\Rightarrow$

2	5	0
3	1	2
4	3	6

Maticová hra ve hře s nulovým součtem

Hru dvou hráčů s nulovým součtem s konečnými množinami strategií $S_1 = \{s_1^1, s_2^1, ..., s_m^1\}$ a $S_2 = \{s_1^2, s_2^2, ..., s_n^2\}$ lze zadat pomocí matice A vyjadřující zisky prvního hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} U_1(s_1^1, s_1^2) & U_1(s_1^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_1^1, s_n^2) \\ U_1(s_2^1, s_1^2) & U_1(s_2^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_2^1, s_n^2) \\ \dots & & & \\ U_1(s_m^1, s_1^2) & U_1(s_m^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_m^1, s_n^2) \end{pmatrix}$$

Definice 0-sum hry

Definition

Hra dvou hráčů s nulovým součtem je $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$, kde

- $Q = \{1, 2\}$ je množina hráčů
- S_1 a S_2 jsou množiny ryzích strategií hráčů
- $U : S \to \mathbb{R}$ je výplatní funkce ve hře. Užitkem hráče jedna je $U_1(s) = U(s)$, $U_2(s) = -U(s)$.

Pozn.: Často budeme 0-sum hru zapisovat maticí hry A, pak by hra byla struktura $\Gamma = (Q; S_1, S_2; A)$.

Pozn.: Jistě může být 0-sum hra s více hráči (interpretace užitků). Zde budeme rozvíjet výhradně dvouhráčové 0-sum hry.

Chování hráče v 0-sum hře

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

- Řádkový hráč má užitek v profilu $s = (s_1, s_2)$ daný $U_1(s) = U(s)$
- Sloupcový hráč má $U_2(s) = -U(s)$
- Oba hráči mají shodné vnímání preference v tom smyslu, že preferují užitek x před y, právě tehdy když $x > y$
- Řádkový hráč chce co největší číslo $U(s)$, sloupcový co nejmenší.

Mohou si to prohodit! Řádkový hráč není "ten s kladnými zisky" a sloupcový ten se zápornými.

Jak hraje řádkový hráč?

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

- Hráč ví, že na každý jeho tah bude protihráč reagovat best-response.
- Řádkový tudíž ví, že sloupcový bude na řádku hledat minimum (tzn. jeho BR, minimalizovat prohru).
- Minimum na řádku je pro řádkového tudíž důležité...
- ...může ovšem zvolit takové minimum, které je mezi všemi řádky nejlepší (největší).
- Je to hledání **maxima mezi minimy**.

Jak hraje řádkový hráč?

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

- Minimum prvního řádku: 0
- druhého: 1
- třetího: 3
- Závěr: pokud bude řádkový hráč hrát třetí řádek, pak dostane nejhůř zisk 3

Pozn.: Hledání minima na řádku není paranoidní chování, pouze předpoklad racionality u sloupcového hráče.

Řádkovému hráči říkáme **maxminimizer**.

Volba sloupcového

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

- Sloupcový přemýšlí podobně a přitom opačně.
- V prvním sloupci je sice můj nejlepší zisk 2 (tzn. -2), ale musím počítat s tím, že řádkový bude hrát třetí řádek (jako svou BR).
- Pro první sloupec je tudíž moje nejvyšší možná ztráta: 4 (druhý: 5, třetí: 6).
- Minimalizuji ztrátu, proto volím první sloupec.

Sloupcový hráč tudíž hledá maximum ve sloupci a globálně **minimum mezi maximy**.

Sloupcovému hráči říkáme **minimaximizer**.

Rovnovážné strategie (které tvoří ekvilibrium)

Připomeňme definici rovnovážného bodu (s_1^*, s_2^*) v dvouhráčové hře.

Definition

Profil (s_1^*, s_2^*) představuje rovnovážné strategie hráčů, pokud platí:

$$U_1(s_1, s_2^*) \leq U_1(s_1^*, s_2^*)$$

$$U_2(s_1^*, s_2) \leq U_2(s_1^*, s_2^*)$$

pro všechny $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.

(poněkud jinak formulovaná definice PNE, ale naprosto ekvivalentní)

Rovnovážné strategie v 0-sum hrách

Užitkové funkce definujeme $U_1(\cdot) = U(\cdot)$, $U_2(\cdot) = -U(\cdot)$.

Pak píšeme, že v rovnovážném bodě musí platit:

$$U(s_1, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2^*)$$

$$-U(s_1^*, s_2) \leq -U(s_1^*, s_2^*) \Rightarrow U(s_1^*, s_2) \geq U(s_1^*, s_2^*)$$

pro všechny $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$. Z předchozího plyne:

$$U(s_1, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2)$$

Hodnota $U(s_1^*, s_2^*)$ se nazývá **cena hry** (taky hodnota hry, angl. game value).

Minimax, Maximin

Definition

Mějme dvoumaticovou hru $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$. Ve hře definujeme minimax a maximin takto:

$$\overline{m} = \min_{s_2 \in S_2} \left\{ \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2) \right\}$$

$$\underline{m} = \max_{s_1 \in S_1} \left\{ \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) \right\}$$

$\overline{m} \geq \underline{m}$

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}, \overline{m} = 4, \underline{m} = 3$$

Theorem

V každé 0-sum hře platí:

$$\overline{m} \geq \underline{m}$$

Proof.

Domácí příprava. $\square$

Zpět k rovnovážnosti

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}, \overline{m} = 4, \underline{m} = 3$$

- Řádkový by tudíž hrál třetí řádek, sloupcový první sloupec.
- Jaký je ovšem zisk hráčů v profilu $(3, 1)$???
- Řádkový dostane o jedna lépe než čekal, sloupcový o jedna hůř (když to teď vidí, hrál by druhý sloupec).
- Sloupcový má tudíž tendenci změnit svoji strategii na druhý sloupec (pak dostane 3). Řádkový by pak změnil na první řádek...

Závěr: profil (3,1) není rovnovážný bod (není stabilní). Kdy ovšem bude volba hráčů vedoucí ke stabilnímu profilu?
$MNE = ((\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$

Sedlový bod (saddle point)

Definition

Mějme 0-sum hru Γ. Profil s^* je sedlovým prvkem, pokud platí, že:

$$U(s^*) = \max_{s_1} \left\{ \min_{s_2} U(s_1, s_2) \right\} = \min_{s_2} \left\{ \max_{s_1} U(s_1, s_2) \right\}$$

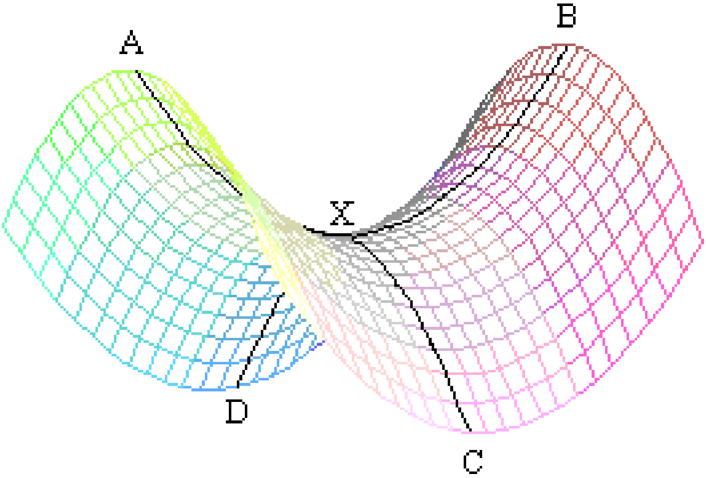
tzn.

$$U(s^*) = \overline{m} = \underline{m}$$

To znamená, že sedlový bod má výplatu nejmenší na řádku a současně nejvyšší ve sloupci. Sedlový bod představuje rovnovážný stav (ekvilibrium) ve hře.

Hodnota užitku v sedlovém bodě se nazývá *cena hry* (value).

Sedlový bod (saddle point)



Sedlový bod (saddle point)

Sedlový bod je ekvivalent PNE ve hrách s nenulovým součtem. Podobně i tady nemusí v ryzích strategiích existovat.

Jsou tedy hry s:

- 0 sedlovými body
- 1 sedlovým bodem
- $n > 1$ sedlovými body

Poznámka: 0-sum hry jsou speciálním případem her s nenulovým součtem, tzn. analytické postupy ve hrách s nenulovým součtem mohou být použity i ve 0-sum hrách.

Sedlový bod

1	1	8
5	2	4
7	0	0

$$\underline{m} = \overline{m} = 2$$

Smíšené strategie

- Od ryzích strategií přecházíme k pravděpodobnostnímu ohodnocení ryzích strategií.
- Od užitkových funkcí přecházíme k funkci očekávaného užitku.

Smíšená strategie hráče

- Hráč i má množinu strategií $S_i = \{s_1^i, s_2^i, ..., s_{m_i}\}$
- Pochopitelně je lepší, když zná svou optimální volbu v ryzích strategiích.
- Jsou však situace, kdy dosáhne lepšího (hypotetického) užitku, když bude chápat, že má hrát nějaké s_j^i s pravděpodobností p_j^i a s_{j+1}^i s p_{j+1}^i ...
- Smíšená strategie taky vyjadřuje indiferentnost k dvěma a více ryzím strategiím

Definition

Smíšená strategie hráče i ve hře Γ je vektor $p^i = (p_1^i, ..., p_{m_i}^i)$, kde

1. $m_i = |S_i|$
2. $\forall j \in \{1, ..., m_i\} : p_j^i \in \langle 0, 1 \rangle$
3. $\sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1$

Smíšené rozšíření 0-sum hry

Definition

Mějme dvouhráčovou hru s nulovým součtem $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$. Smíšeným rozšířením této hry nazveme hru s prostory strategií

$$S_1^s = \left\{ p, p = (p_1, ..., p_m) | \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \forall j \in \{1, ..., m\} : p_j \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$$

$$S_2^s = \left\{ q, q = (q_1, ..., q_n) | \sum_{k=1}^{n} q_k = 1, \forall k \in \{1, ..., n\} : q_k \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$$

a výplatní funkcí (A je matice hry)
$\pi(p, q) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_j U(s_j, s_k) q_k = pAq^T$

Ekvilibrium ve smíšeném rozšíření 0-sum hry

Theorem

V každé konečné 0-sum hře existuje řešení ve formě smíšených strategií.

Originální znění:

Theorem

For every two-person, zero-sum game with finite strategies, there exists a value V and a mixed strategy for each player, such that (a) Given player 2's strategy, the best payoff possible for player 1 is V, and (b) Given player 1's strategy, the best payoff possible for player 2 is -V.

Původní znění v: J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, In: Math. Annalen, vol. 100, 1928, pp. 295–320

Ekvilibrium ve smíšeném rozšíření 0-sum hry

Jiné znění:

Theorem

Vždy existují smíšené strategie (p^*, q^*) takové, že platí:

$$\pi(p^*, q^*) = \max_p \min_q \pi(p, q) = \min_q \max_p \pi(p, q)$$

Hledáme tedy vektory p^*, q^* takové, že platí:

$$pAq^{*T} \leq p^*Aq^{*T} \leq p^*Aq^T$$

pro všechny $p \in S_1^s, q \in S_2^s$.

Výpočet smíšeného ekvilibria 0-sum her

Problém je specifikován, potřebujeme najít algoritmus na jeho vyřešení.

Předvedeme si postup výpočtu u dvouhráčových her.

Grafické řešení maticových her ve tvaru (2,n) strategií

Očekávaný zisk hráče 1 ve smíšených strategiích $(p, 1-p)$ je při ryzích strategiích hráče 2 dán:

$$g_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j} \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Hledáme (sloupcový hledá takové j, že $g_j(p)$ je minimální):

$$p^* = arg \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \left[\min_{j=1,2,...,n} g_j(p) \right]$$

Nejprve budeme hledat funkci

$$\varphi(p) := \min_{j=1,2,...,n} g_j(p)$$

Tato funkce je konkávní, po částech lineární a snadno lze nalézt bod jejího maxima. Hledaná cena hry je pak:

$$v = \varphi(p^*) := \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p)$$

Nastává-li extrém v bodě p^*, kde $g_j(p^*) = g_k(p^*) = v$ pro jednoznačně určené strategie j, k, pak složky smíšené rovnovážné strategie hráče 2 s indexy různými od j, k jsou rovny nule. Složky, které mohou být nenulové, získáme vyřešením soustavy:

$$a_{1j}q_j + a_{1k}q_k = v \quad q_j + q_k = 1 \quad q_j \geq 0, q_k \geq 0$$

nebo

$$a_{2j}q_j + a_{2k}q_k = v \quad q_j + q_k = 1 \quad q_j \geq 0, q_k \geq 0$$

Demo výpočtu smíšeného řešení 0-sum hry

Mějme maticovou hru

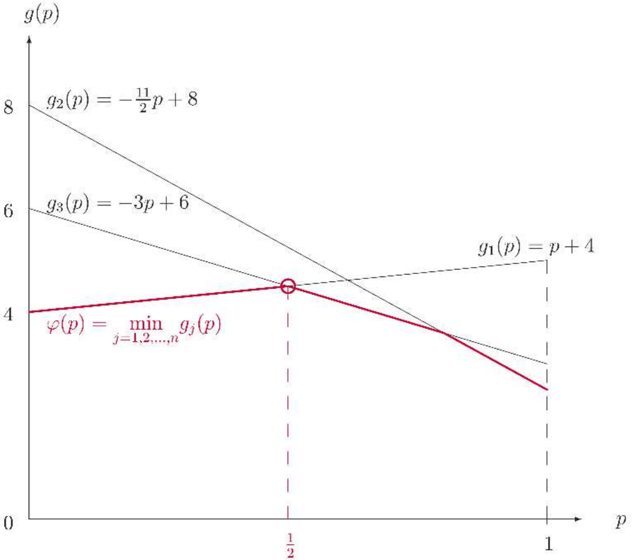
$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$g_1(p) = 5p + 4(1-p) = p + 4$$
$$g_2(p) = \frac{5}{2}p + 8(1-p) = -\frac{11}{2}p + 8$$
$$g_3(p) = 3p + 6(1-p) = -3p + 6$$

Připomeňme, že $g_j(p)$ vyjadřuje očekávaný zisk hráče 1 pro případy, kdy hráč 2 hraje strategie j. Míra výhry hráče 1 značí míru prohry hráče 2. Hráč 2 proto bude volit takové j, že $g_j(p), p \in \langle 0, 1\rangle$ bude minimální.

$\varphi(p)$ nabývá maxima v $p = \frac{1}{2}$, hodnota maxima je $v = 4.5$.

Grafické řešení nalezení maxima $\varphi(p)$



$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Maximum bylo nalezeno jako průsečík $g_1(p)$ a $g_3(p)$, tzn. $j, k = 1, 3$.
Dále řešíme soustavu rovnic (ještě nás zajímá q):

$$5q_1 + 3q_3 = 4.5$$
$$q_1 + q_3 = 1$$

s omezeními $q_1 \geq 0, q_3 \geq 0$. Získáváme řešení $q_1 = 0.75, q_3 = 0.25$.

Řešení hry je tedy smíšený rovnovážný bod

$$(p^*, q^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)\right)$$

Co znamená ten výsledek?

Zadání:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$(p^*, q^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4} \right) \right)$$

Očekávaný užitek hráče 1 je:

$$\pi(p^*, q^*) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}5 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}6 =$$

$$= \frac{3}{8}5 + \frac{1}{8}3 + \frac{3}{8}4 + \frac{1}{8}6 = \frac{15 + 3 + 12 + 6}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Víme, že hráč hrající smíšenou strategii je indiferentní vůči všem svým ryzím strategiím s nenulovou pravděpodobností jako best-response na smíšenou strategii protivníka.

Hráč 1 očekává strategii q^* u protivníka, pak je mu jedno, jakou svoji strategii zvolí (obě mají nenulovou pravděpodobnost).
$\pi((1,0), q^*) = 5\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4} = \frac{15+3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$
$\pi((0,1), q^*) = 4\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} = \frac{12+6}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$

Hráč 2 uhne ze své strategie $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ na strategii $(0,1,0)$ při předpokladu, že hráč 1 stále hraje p^*. Pak $\pi(p^*, (0,1,0)) = \frac{5}{2}\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = 5.25$ a to je pro hráče 2 horší výsledek (větší ztráta).

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Ekvilibrium ve smíšených strategiích vyjadřuje optimální očekávaný zisk u obou hráčů. Pokud hráč 2 odhalí smíšenou strategii p^* protivníka, pak se rozhoduje mezi strategiemi 1 a 3, protože by jeho očekávaný zisk při hraní prostředního sloupce byl $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+8\right) = 5.25$.

Bude-li hráč 1 hrát jinou strategii než $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nebo hráč 2 jinou než $q^* = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, pak dosáhnou horšího užitku.

Logika ekvilibria: Doufáme, že hráči tuto úvahu provedou a pochopí, že ekvilibrium pojmou za svoje chování.

Algoritmizace nalezení ekvilibria v 0-sum hrách

- Hledají se optima v prostorech omezených lineárními funkcemi (povede na nerovnice)
- Potřebujeme metodu zvanou lineární programování (optimalizace)
- Na ní ukážeme algoritmus výpočtu ekvilibria v 0-sum hrách

Lineární programování

- Často řešíme optimalizační úlohy, kde je m proměnných $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.
- Maximalizuje se nebo se minimalizuje hodnota posuzovací funkce $f(a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{m} o_i a_i$, $o_i \in \mathbb{R}$.
- Na řešení jsou kladena omezení ve formě lineárních nerovnic s proměnnými $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Časté použití ve hrách (hledání sedlového bodu, řešení jádra v kooperativních hrách, výpočet korelovaného ekvilibria, ...).

Naučit se metodu lineárního programování je velmi praktické.

Definujeme LP-úlohu. Řešení úlohy pak hledá nějaký algoritmus, např. simplexová metoda.

Demopříklad na úvod lineárního programování

Lékárník má namíchat léčivou kůru tvořenou normálními a king-size tabletkami složenými z aspirinu, sody a kodeinu.

[grán[1]]	aspirin	soda	kodein
normání	2	5	1
king-size	1	8	6

Lékárník ovšem ví, že je třeba minimálně 12g aspirinu, 74g sody, 24g kodeinu pro dovršení léčby. Jaké je ovšem rozdělení mezi normální a king-size tablety?

[1] grán=1/456 libry české=1,127 g
Použití zejména v lékárnictví, význam slova grán je zrno ječmene (asi se léčili ječmenem)

Zavedeme x pro počet normálních tablet, y pro počet king-size tablet.

Pro hledání optima jsme schopni formulovat určitá omezení (angl. constraints):

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ze zadání víme, že x normálních tablet bude obsahovat $2x$ aspirinu a y king-size tablet $1y$ aspirinu. Víme, že pro úspěšnou léčbu musí být požito alespoň 12g aspirinu.

$$2x + y \geq 12$$

$$5x + 8y \geq 74$$

$$1x + 6y \geq 24$$

Formulace LP-úlohy

Hledáme

$$x \geq 0, y \geq 0$$

aby platilo

$$2x + y \geq 12$$

$$5x + 8y \geq 74$$

$$1x + 6y \geq 24$$

a

$$m = x + y$$

bylo MINIMÁLNÍ.

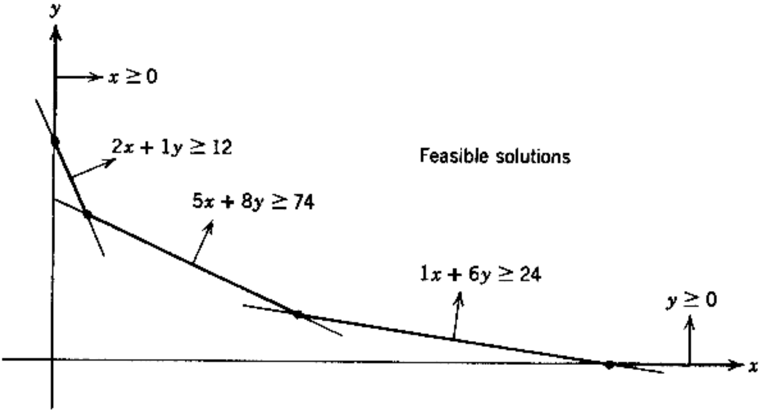
Oblast možného řešení

Jakou oblast vymezuje $x \geq 0$???

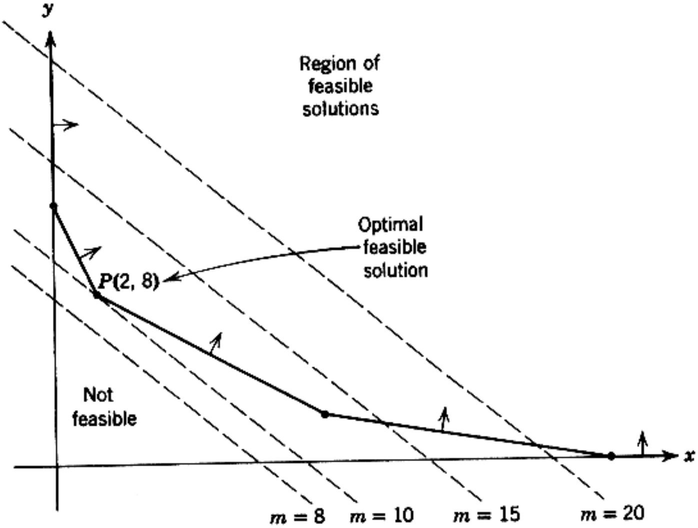
Jakou oblast vymezuje $2x + y \geq 12$? Ohraničení oblasti zřejmě udává rovnice $2x + y = 12$, tzn. funkce $y = 12 - 2x$, což je přímka procházející body $(0, 12)$ a $(6, 0)$.

Oblast možného řešení

Dolní ohraničení feasible oblasti



Dolní ohraničení feasible oblasti+hodnotící funkce



GLPK: GNU Linear Programming Kit

- Jednoduchý open-source nástroj pro výpočty LP-problémů
- Řeší real/integer proměnné
- Velmi obecné možnosti zadání problému (není nutno převádět na nějakou formu standardizovaného tvaru)
- Modelovací jazyk, vlastní API

Zadáme nyní náš příklad do GLPK.

```
...
glp_prob *lp;
lp=glp_create_prob();
glp_set_obj_dir(lp, GLP_MIN  /* GLP_MAX */);
glp_add_rows(lp,3); /* 3 constraints */
glp_set_row_bnds(lp,1,GLP_LO,12,0);
glp_set_row_bnds(lp,2,GLP_LO,74,0);
glp_set_row_bnds(lp,3,GLP_LO,24,0);
glp_add_cols(lp,2); /* 2 variables */
glp_set_col_bnds(lp,1,GLP_LO,0,0);
glp_set_obj_coef(lp,1,1);
glp_set_col_bnds(lp,2,GLP_LO,0,0);
glp_set_obj_coef(lp,2,1);
```

```
int ia[...],ij[...];
double ar[...];
ia[1]=1; ja[1]=1; ar[1]=2; /* a[1,1]=2 */
ia[2]=1; ja[2]=2; ar[2]=1; /* a[1,2]=1 */
...
glp_load_matrix(lp, 6, ia, ja, ar);
glp_simplex(lp, NULL);

double z,x,y;
z=glp_get_obj_val(lp);
x=glp_get_col_prim(lp,1);
y=glp_get_col_prim(lp,2);
glp_delete_prob(lp);
```

Výpočet (p^*, q^*) jako LP-úloha

Vycházejme z matice hry $A = (a_{ij})\,, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}$, kde všechny prvky jsou kladné (lze toho dosáhnout transformací hry na ekvivalentní hru).

Hledáme smíšené strategie $p = (p_i)_i$, $q = (q_j)_j$.

Výpočet (p^*, q^*) jako LP-úloha

Hráč 1 hledá pro libovolné, ale v dané chvíli pevné p svou minimální garantovanou výhru (protože sloupcový bude vybírat minimum na sloupci). Definujme (je to BR sloupcového hráče):

$$h = \min_j \{a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m\}$$

Zřejmě je

$$h \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

tzn.

$$q_j \cdot h \leq q_j \cdot (a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m) \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

Plyne z toho (h jako hodnota hry):

$$h \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j = \pi(p, q)$$

Výpočet (p^*, q^*) jako LP-úloha

Hodnota h je pro prvního hráče absolutní možné získatelné minimum bez ohledu na to, jakou ryzí nebo smíšenou strategii zvolí sloupcový hráč.
Nerovnosti

$$h \leq a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{mj}p_m \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

vydělíme prvkem h:

$$1 \leq a_{1j}\frac{p_1}{h} + a_{2j}\frac{p_2}{h} + \cdots + a_{mj}\frac{p_m}{h}$$

a označme: $y_i = \frac{p_i}{h}$. Zřejmě platí $y_1 + y_2 + \cdots + y_m = \frac{1}{h}$

Výpočet (p^*, q^*) jako LP-úloha

Maximalizovat minimální výhru pro hráče 1 znamená maximalizovat h, resp.

Minimalizovat

$$\frac{1}{h} = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

při omezeních:

$$1 \leq a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$$

Výsledkem jsou proměnné $y_i = \frac{p_i^*}{h}$ a h, z nich lze odvodit $(p_1^*, ..., p_m^*)$.
Sloupcový hráč počítá analogicky.

Příště...

- Cournotův a Bertrandův model oligopolu.
- Rozbor Nashovy věty o existenci ekvilibria (důkaz).

Pak se posuneme na sekvenční hry, kooperativní hry, vyjednávání, opakování her.