THE: Cournotův model oligopolu
Existence Nashova ekvilibria

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

October 16, 2024

Úvod

Čerpáno z:

- Fudenberg, D., Tirole, J.: Game Theory, The MIT Press, 1991
- McCarthy, N., Mierowitz, A.: Political Game Theory: An Introduction, Cambridge University Press, 2007
- Nisan, N. et al.: Algorithmic Game Theory, Cambridge University Press, 2007
- Magdaléna Hykšová: Přednášky z teorie her, Fakulta dopravní ČVUT

Úvod

Dnešní témata:

- Cournotův a Bertrandův model oligopolu (ukázka výpočtu NE ve hrách se spojitými množinami strategií)
- Věta o existenci MNE v konečných hrách (Nash, 1950).

Příště Stackelbergův model oligopolu.

Cournotův a Bertrandův model oligopolu

- Ukázka strategického modelu vytvořeného bez znalosti NE, PNE, MNE.
- Monopol, duopol, oligopol.
- Jako zjednodušující fakt definujeme komoditu, u které nelze kvalitou rozlišit výrobce, ale pouze cenou. Příkladem může být např. standardizovaný rohlík. Všichni ho vyrábí stejně dobře, kupujícího zajímá výhradně jenom cena.
- Monopol – zkoumaný produkt vyrábí/prodává pouze jeden výrobce.
- Duopol – existují dva srovnatelně silní výrobci (každý je schopen ovlivnit cenu na trhu).
- Oligopol – existuje více výrobců, kde každý je schopen ovlivnit cenu.
- Situaci cenového vůdce a následníků si probereme později.

Předpoklady, definice

- Produkt je rozlišitelný pouze cenou (je homogenní).
- Firmy rozhodně nekooperují.
- Firmy mají stejné výrobní náklady c na výrobu jednoho kusu komodity. Náklad je neměnný dle stavu zadané výroby (žádné množstevní slevy).
- Poptávka je lineární (klesá lineárně s žádanou cenou), resp. cena klesá lineárně s dodaným množstvím.
- Firmy soutěží množstvím nebo cenou. Nejsou žádné jiné metody boje.
- Nabízí-li firmy $n_i = (q_i, p_i)$, pak zákazníci kupují nejdříve z levnějšího zdroje do jeho vyčerpání q_i, pak z dražšího. Pokud $p_1 = p_2 = ... = p_n$, pak se nakupuje rovnoměrně ode všech.

Cournotův model monopolu (1838)

Produkt je tedy dodáván jedním výhradním výrobcem. Monopolista uvažuje dodat až q množství komodity. Nejvyšší možná cena v případě prodeje q bude:

$$p = M - q$$

kde M je konstanta daná trhem (vztah množství na trhu a ceny). Monopolista maximalizuje svůj užitek (bez konkurence, c je výrobní náklad na jednotku komodity):

$$u(q) = p \cdot q - c \cdot q = Mq - q^2 - cq$$

což je tržba minus výrobní náklady.

Monopolista

$$u(q) = p \cdot q - c \cdot q = Mq - q^2 - cq$$

Hledáme extrém užitkové funkce (derivace...):

$$u'(q) = M - 2q - c = 0 \Rightarrow q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M - c)$$

Maximálního zisku dosáhne monopolista při výrobě q^*_{mon} množství komodity, cena bude

$$p^*_{mon} = M - q^*_{mon} = M - \frac{1}{2}(M - c) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(M + c)$$

Zisk:

$$u^*_{mon} = u(q^*_{mon}) = q^*_{mon}(p^*_{mon} - c) = \left[\frac{1}{2}(M - c)\right]^2$$

Cournotovo řešení duopolu

Dva hráči, tzn. hledáme q_1, q_2 při výrobních nákladech c.
Podobně:

$$p = M - q_1 - q_2$$

Hráči nejspíš volí množství (svou množstevní strategii) z intervalu $\langle 0, M \rangle$, tzn. $S_1 = S_2 = \langle 0, M \rangle$.
Výplatní funkce:

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c)q_1 = (M - q_1 - q_2 - c)q_1$$
$$u_2(q_1, q_2) = (p - c)q_2 = (M - q_1 - q_2 - c)q_2$$

První duopolista: Pro každou strategii soupeře q_2 hledá takové množství $q_1 = R_1(q_2)$, aby hodnota $u_1(q_1, q_2)$ byla maximální (je to jeho best-response). Funkci $R_1(q_2)$ říkáme *reakční křivka*.

Duopolista č. 1

Pro jaké q_1 dosahuji maximálního $u_1(q_1, q_2)$?

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = M - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

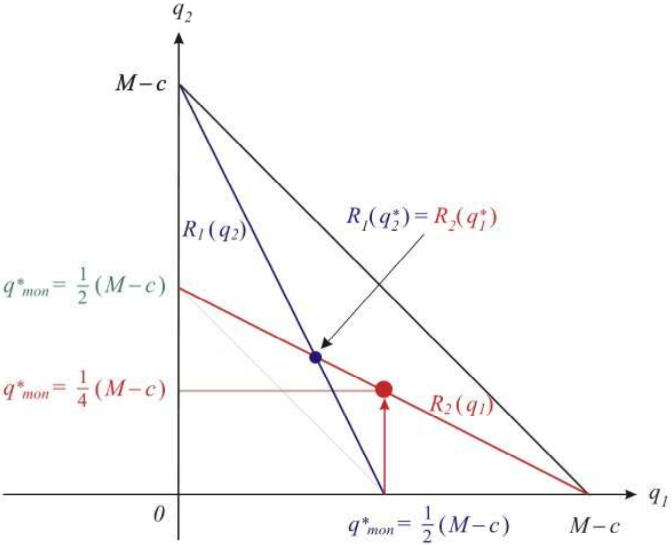
$$R_1(q_2) = q_1 = \frac{1}{2}(M - c - q_2)$$

analogicky:

$$R_2(q_1) = q_2 = \frac{1}{2}(M - c - q_1)$$

Kde je rovnovážný bod (q_1^*, q_2^*)? Má to být vzájemná best-response...

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(M - c - q_1) = \frac{1}{2}(M - c) - \frac{1}{2}q_1$$



Řešení duopolu

Hledáme (q_1^*, q_2^*) tak, že $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$

$$q_2 = \frac{1}{2}\left(M - c - \frac{1}{2}(M - c - q_2)\right)$$
$$q_2^* = \frac{1}{3}(M - c)$$
$$q_1^* = \frac{1}{3}(M - c)$$

$$p_D^* = M - \frac{2}{3}(M - c) = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$$

Zisk pro každého: $u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \left[\frac{1}{3}(M - c)\right]^2$.
Zisk celkově: $u_1(q_1^*, q_2^*) + u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{2}{9}\left[(M - c)\right]^2$ (je méně než zisk monopolisty).
Vyrobeno celkově: $q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(M - c)$ (více než monopolista).
Duopolisté prodávají větší množství výrobků za nižší cenu než monopolista.

Úvaha: různé výrobní náklady $c_1 \neq c_2$

$$q_1^* = \frac{1}{3}(M + c_2 - 2c_1)$$
$$q_2^* = \frac{1}{3}(M + c_1 - 2c_2)$$

Uplatní se více hráč s nižšími náklady.

Úvaha: tajná dohoda duopolistů

Mohou se duopolisti dohodnout a vyrábět pouze q^*_{mon} jako monopolista?

Dostáváme se tak mimo rovnovážný bod. V takovém bodě je situace nestabilní, protože každý z hráčů může vybočit z profilu a *krátkodobě si zisk navýšit* (proto to není NE).

Pokud připouštíme kooperativnost (např. formou vyjednávání), pak studujeme rozsáhlejší oblast řešení. Více v přednášce o kooperativních hrách.

Řešení oligopolů

Uvažujme n hráčů, kde každý hledá svoji strategii q_i. Zisky jsou opět dány:

$$u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = (p - c)q_i = (M - c - q_1 - q_2 - ... - q_n)q_i$$

Rovnovážný bod...

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = M - c - q_1 - q_2 - ... - 2q_i - ... - q_n = 0$$

Obdržíme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2q_1 & + & q_2 & + & ... & + & q_n & = & M - c \\
q_1 & + & 2q_2 & + & ... & + & q_n & = & M - c \\
\cdots & & & & & & & & \\
q_1 & + & q_2 & + & ... & + & 2q_n & = & M - c
\end{array}$$

Řešení oligopolů

Řešením soustavy obdržíme

$$q_1^* = q_2^* = ... = q_n^* = \frac{M - c}{n + 1}$$

Oligopolisté dohromady vyrobí:

$$q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^* = n\frac{M - c}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}(M - c)$$

Z toho je patrné, že s rostoucím počtem hráčů roste i množství dodaného produktu a klesá jeho cena (a zisk firem).

$$p^* = \frac{1}{n + 1}M + \frac{n}{n + 1}c$$

$$u^* = \frac{n}{(n + 1)^2}(M - c)^2$$

Řešení oligopolů

Když jde n k nekonečnu, dostáváme se do situace, která se nazývá *dokonalá soutěž (konkurence)*, kdy na trhu soupeří velké množství srovnatelných firem, kde žádná z nich nemá moc významně ovlivnit množství na trhu.

Velmi zajímavé je zjištění, že (dodané množství):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}(M - c) = M - c$$

Cena za výrobek:

$$p^* = M - (M - c) = c$$

Celkový zisk oligopolistů v dokonalé konkurenci:

$$u^* = 0$$

Srovnání situací na trhu

	Celkové množství q^*	Cena za jednotku p^*	Celkový zisk u^*
Monopol	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$
Duopol	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
Oligopol	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M+\frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$
Dok. soutěž	$(M-c)$	c	0

Bertrandův model oligopolu (1883)

- Bertrand revidoval závěr Cournota s tvrzením, že už u duopolistů se může rozběhnout dokonalá konkurence, neboť jejich množstevní ekvilibrium nemusí být stabilní.
- Připusťme, že duopolisté hrají $(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{3}(M - c)$ za shodnou cenu $p^* = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$. Při této ceně tvoří nenulový zisk z výroby a prodeje. Při stejné ceně mají rovný množstevní podíl na prodeji.
- Najednou jeden z hráčů změní svou cenu $p_i^* := p^* - \Delta$, kde Δ je libovolně malé.
- Podle logiky trhu by měl hráč i vyprodat veškerou svou produkci a po něm až dražší hráč.
- Plyne z toho, že hráči nesoutěží množstvím, ale cenou, která může jít až na úroveň nákladů, tedy implikující nulový zisk.
- Z faktu, že to tak v realitě není, plyne tzv. Bertrandův paradox

Cenová válka.

Výpočet Cournot-Nashovy rovnováhy ve spojitých S_i

- Cournotův model ukazuje způsob výpočtu rovnovážného bodu ve hrách se spojitými množinami strategií.
- Tím, že tento postup odvodil Antoine Augustin Cournot (1801-1877) značně dřív než Nash, bývá někdy tato rovnováha nazývána Cournot-Nashovo ekvilibrium
- Obecný postup: odvodit analyticky reakční křivky hráčů a vyhodnotit bod/body jejich průsečíků.
- Celkově je to analytické řešení modelu.

Pro nás je Cournot-Nashovo ekvilibrium zajímavé způsobem výpočtu (ve spojitých S_i).

Problém existence Nashova ekvilibria

- Cournotův model rovnováhy ukazuje existenci rovnovážného bodu u her se spojitými množinami strategií (de facto ryzí).
- Proč vlastně má mít hra rovnovážný bod? Říkáme taky řešení...
- Co se změní, když množiny strategií diskretizujeme?
- Diskretizace v případě modelu typu Cournotova duopolu/oligopolu vzorkuje množstevní strategie. Může je vzorkovat nevhodným způsobem.
- Diskrétní množiny strategií při rozhodování nejsou nepřirozené. Lidé často vnímají rozhodování v diskrétních jednotkách (množství, cena).
- Diskretizujeme tím i užitkové funkce.
- Spojitost se do toho dostane jiným způsobem (prostory smíšených strategií jsou z principu spojité).

Existence Nashova ekvilibria ve hrách se spojitými S_i

Theorem

Nashovo ekvilibrium hry v normální formě $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$ *existuje, pokud jsou splněny následující podmínky:*

1. $S_i, \forall i \in Q$ *je konvexní a kompaktní podmnožina Euklidovského prostoru.*
2. $U_i(s_i, s_{-i}) : S \to \mathbb{R}^1$ *jsou spojité funkce u všech hráčů* $i \in Q$.
3. *pro všechny hráče* $i \in Q$ *a všechny* $s_{-i} \in S_{-i}$ *je funkce* $U_i(s_i, s_{-i})$ *ryze kvazi-konkávní na množině* S_i.

Důkaz podobné věty provedeme později.

Kompaktní a konvexní množina

Definition

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní, pokud je ohraničená (existuje číslo b takové, že $\forall a \in A : ||a|| < b$) a uzavřená (její doplněk $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená množina).

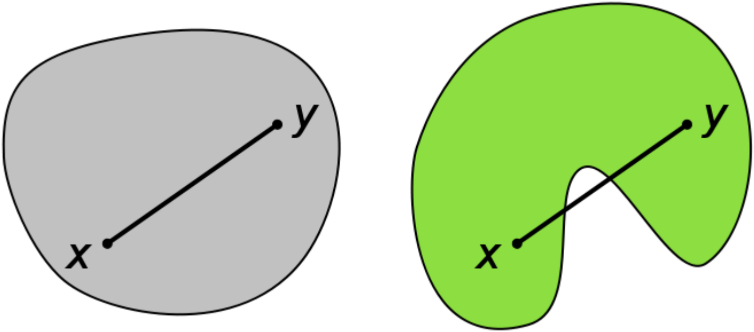
Definition

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud pro každé dva její prvky $x, y \in A$ a každé reálné číslo $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$$

Tzn., každý bod na úsečce mezi body x a y patří do množiny A.

Konvexní a nekonvexní množina



Ryze kvazi-konkávní funkce

Definition

Funkce $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ (kde A je konvexní množina) je ryze kvazi-konkávní, jestliže $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > t$ pro všechna $x, y \in A, x \neq y$, $\lambda \in (0,1)$ a jakékoliv $t \in \mathbb{R}^1$ takové, že $f(x) \geq t$ a $f(y) \geq t$.

Definice říká, že funkce (např. užitková funkce, resp. preferenční) nemůže na intervalu (x, y) takovém, že pro oba ohraničující body je $f(\cdot)$ slabě lepší než hodnota t, tvrdit, že připouští bod $z \in (x, y)$, který by nebyl striktně lepší než t nebo dokonce horší. Naopak, všechny body $z \in (x, y)$ musí být striktně lepší (striktně preferovány nad) než t.

Definice hry v normální formě (konečné S_i)

Definition

Hra N hráčů je struktura $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$, kde Q je množina hráčů $Q = \{1, ..., N\}$, $S_i, i \in Q$ jsou konečné množiny ryzích strategií hráčů a $U : \prod_{i \in Q} S_i \to \mathbb{R}$ jsou jejich výplatní funkce.

Ideální je mít jedno unikátní ryzí Nashovo ekvilibrium ve hře, ale bývají situace, kdy je počet PNE větší než jedna nebo naopak nulový.

Klasická hra v normální formě

Peter/John	přiznat se	zatloukat
přiznat se	-10,-10	0,-20
zatloukat	-20,0	-1,-1

Platí následující?:

1. $S_i, \forall i \in Q$ je konvexní a kompaktní podmnožina Euklidovského prostoru.
2. $U_i(s_i, s_{-i}) : S \to \mathbb{R}^1$ jsou spojité funkce u všech hráčů $i \in Q$.
3. pro všechny hráče $i \in Q$ a všechny $s_{-i} \in S_{-i}$ je funkce $U_i(s_i, s_{-i})$ striktně kvazi-konkávní na množině S_i.

Je to důsledek konečnosti (diskrétnosti) množin strategií.

Smíšené rozšíření hry v normální formě

Definition

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Hru $\Gamma^m = (Q; (\Delta_i)_{i \in Q}; (\Pi_i)_{i \in Q})$ nazveme smíšeným rozšířením hry Γ, pokud jsou pro všechny hráče $i \in Q$:

- Δ_i je množina smíšených strategií hráče i (vektory délky $|S_i|$). $\sigma_i \in \Delta_i$ označuje jednotlivé strategie prostoru Δ_i. Číslo $\sigma_i(s_i)$ označuje pravděpodobnost přiřazenou ryzí strategii $s_i \in S_i$ v rámci smíšené strategie σ_i. Celkově $\Delta = \times_i \Delta_i$.

$$\Delta_i = \left\{ \sigma_i \in \langle 0, 1 \rangle^{m_i} \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}; m_i = |S_i|$$

- Výplatní funkce hráče i

$$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sum_{s_i \in S_i} U_i(s_i, s_{-i}) \sigma_i(s_i) \sigma_{-i}(s_{-i})$$

Smíšené rozšíření hry v normální formě

Připomeňme definici smíšeného Nashova ekvilibria (MNE):

Definition

Smíšený profil $\sigma^* \in \Delta$ je ekvilibrium ve hře Γ^m, pokud platí pro všechny $i \in Q$:

$$\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$$

$$BR_i(\sigma_{-i}) = arg\left[\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\right]$$

Pozn.: Předpokládáme, že výsledkem operace $BR_i(\sigma_{-i})$ je podmnožina Δ_i. Množina Δ_i má jiný charakter než S_i! Z toho plyne.: hráč i je v kontextu sub-profilu σ_{-i} indiferentní mezi všemi $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

Otázka: Jak je velká množina $BR_i(\sigma_{-i})$?

BR: experiment

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

$$MNE = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)$$

$\pi_1(p, q) = 5pq - p - 3q + 2$
$BR_1(\sigma_{-1}) = BR_1((\frac{1}{10}, \frac{9}{10})) = -0.5p + 1.7 \Rightarrow p := 0$
$BR_1((\frac{9}{10}, \frac{1}{10})) = 3.5p - 0.7 \Rightarrow p := 1$
$BR_1((\frac{1}{5}, \frac{4}{5})) = 5p \cdot 0.2 - p - 3 \cdot 0.2 + 2 = 1.4$
Zde již BR není závislé na p, tzn. $BR_1(q = 0.2) = \Delta_1$. Avšak pouze pro jeden bod v Δ_1 je to podobně u sloupcového.

Věta o existenci Nashova ekvilibria

Theorem

Každá konečná hra má vždy alespoň jedno řešení ve smíšených strategiích.

John Nash (1950)

Význam Nashovy věty, její důkaz

- Připomeňme reakční křivky, což je speciální případ BR-odezvy, pokud je BR funkce (vstupu je přiřazen právě jeden výstup, opakem je tzv. korespondence).
- V našem vnímání best-response připouštíme, že v ryzích i smíšených strategiích přiřazuje BR bodu z definičního oboru (sub-profil) víc nejlepších odpovědí.
- **Nash založil svůj důkaz na zkoumání, zda-li BR-korespondence může mít pevný bod.**

Zavedeme si pojem *korespondence*. Korespondence $c : A \to\to B$ je zobecněná totální funkce nebo multi-value funkce, která každému $a \in A$ přiřazuje (neprázdnou) podmnožinu B.
Alternativně můžeme psát:

- $c : A \to 2^B$, s vlastností $\forall a \in A : c(a) \neq \emptyset$
- one-to-one correspondence je ekvivalentní s pojmem bijekce

Význam Nashovy věty, její důkaz

Definition

Mějme korespondenci $c : A \rightarrow\rightarrow A$. Pevný bod (fixed-point) korespondence c je takový bod $x^* \in A$, že

$$x^* \in c(x^*)$$

- MNE je z principu pevný bod BR-korespondence
- Pokud dokážeme, že kterákoliv BR-korespondence může mít pevný bod, pak existuje MNE pro kteroukoliv hru

Obecný předpoklad

Nashovo ekvilibrium je strategický profil σ^* takový, že $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$ pro všechny $i \in Q$. Je to tedy pevný bod BR-korespondence:

$$BR(\sigma) = (BR_1(\sigma_{-1}), BR_2(\sigma_{-2}), \ldots, BR_N(\sigma_{-N}))$$

V IT-chápání:

- $BR_i(\sigma_{-i})$ je funkce, která na zadaný sub-profil (chování všech kromě i) vrátí nejlepší strategie hráče i.
- V oboru ryzích strategií je to podmnožina S_i, v oboru smíšených strategií je to podmnožina Δ_i.
- $BR(\cdot)$ je funkce, která to vrátí pro všechny $i \in Q$.
- Představme si za BR iterativní výpočet. Skončí?
- Je ta funkce $BR(\cdot)$ taková, že by vrátila pro MNE s^* podmnožinu obsahující právě s^*?????

Obecný předpoklad, postup

- Existuje věta (Kakutani's fixed-point theorem), která stanovuje podmínky, aby korespondence měla pevný bod.
- Pokud ukážeme, že BR splňuje tyto podmínky, pak má pevný bod, tzn. hra má ekvilibrium.
- Ukážeme si Kakutaniho theorém a Nashův důkaz.

Kakutani's fixed point theorem

Shizuo Kakutani (1911–2004)

Theorem

Korespondence $r : A \rightarrow\rightarrow A$ má pevný bod, pokud platí:

1. *A je kompaktní, konvexní, neprázdná podmnožina (konečně-rozměrného) Euklidovského prostoru,*
2. *$r(a)$ je neprázdná pro všechny $a \in A$,*
3. *$r(a)$ je konvexní pro všechny $a \in A$,*
4. *$r(\cdot)$ je shora hemispojitá (ekv. s podmínkou, že má uzavřený graf).*

Důkaz Nashovy věty

V důkazu budeme vyšetřovat funkci

$$BR_i(\sigma_{-i}) = arg\left[\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi(\sigma_i, \sigma_{-i})\right]$$

a následně

$$BR(\sigma) = (BR_1(\sigma_{-1}), BR_2(\sigma_{-2}), ..., BR_N(\sigma_{-N}))$$

Jejich zkoumáním dojdeme k závěru, zda-li naplňují nezbytné podmínky Kakutaniho, aby mohly formovat smíšené Nashovo ekvilibrium.

Berge's Theorem of the Maximum

Theorem

Nechť $X \subset \mathbb{R}^d, M \subset \mathbb{R}^z$ *jsou kompaktní a konvexní množiny. Nechť je funkce* $f(x, m) : X \times M \to \mathbb{R}^1$ *spojitá na* X *a* M*. Korespondence* $c : M \to\to X$ *definovaná jako*

$$c(m) = arg \left\{ \max_{x \in X} [f(x, m)] \right\}$$

je neprázdná pro každé $m \in M$ *a shora hemispojitá.*

Pozn.: na funkci $f(x, m)$ můžeme pohlížet jako na hodnotící funkci optimalizátoru, kde m je vstupní specifikace problému a řešení se hledá přes všechny $x \in X$.

Pozn.: všimněte si podobnosti s BR-korespondencí.

Pozn.: hemispojitost odpovídá pojmu spojitost u funkcí.

Důkaz Nashovy věty

V konečných hrách, S_i jsou konečné množiny. Jejich smíšené rozšíření Δ_i jsou ovšem kompaktní a konvexní množiny (a rozhodně neprázdné). Tzn., první podmínka Kakutaniho byla splněna.

Z definice hry plyne, že $\pi_i(\cdot)$ jsou lineární funkce a proto spojité na Δ_i. Z Bergova theorému o maximu proto plyne, že $BR_i(\sigma_{-i})$ je proto neprázdná pro všechny $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ a shora hemispojitá. Druhá a čtvrtá Kakutaniho podmínka splněna.

Poznámka: definice lineární funkce (zobrazení):

Definition

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^m$ a $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Zobrazení $F : X \to Y$ se nazývá lineární, pokud pro všechny $x, y \in \mathbb{R}^m$ a $q \in \mathbb{R}$ platí současně:

1. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
2. $F(q \cdot x) = q \cdot F(x)$

Důkaz Nashovy věty, Poznámka ke konvexnosti BR

Protože $\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ je lineární pro libovolné σ_{-i}, pak najdeme-li dva body σ'_i, σ''_i tak, že

$$\pi_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma''_i, \sigma_{-i})$$

tzn. $\sigma'_i, \sigma''_i \in BR_i(\sigma_{-i})$, pak (z linearity):

$$\pi_i(\lambda\sigma'_i + (1-\lambda)\sigma''_i, \sigma_{-i}) =$$

$$\lambda\pi_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)\pi_i(\sigma''_i, \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$$

pro libovolné $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Tzn., BR dává konvexní hodnotu. Třetí podmínka Kakutaniho byla splněná.

Co znamená ta rovnost? $BR_i(\sigma_{-i})$ vrací množinu $A \subseteq \Delta_i$, tzn. pro každé její dva různé body σ'_i, σ''_i musí platit, že dávají stejný očekávaný užitek v kontextu σ_{-i}. Nás zajímá, zda-li je množina A konvexní.

Závěr důkazu

Podmínky Kakutaniho věty byly splněny, tím pádem je $BR(\sigma)$ korespondence s pevným bodem, tzn. má-li σ^* být rovnovážný bod ve smíšených strategiích, pak rozhodně platí, že

$$\sigma^* \in BR(\sigma^*)$$

Tak J. Nash v roce 1950 (zasláno k recenzi Nov 1949) v článku *Equilibrium Points in N-person Games* dokázal univerzální řešitelnost konečných nekooperativních her (článek je k dispozici na "perchtě", má jednu(!!!) stránku textu).

Obecný závěr pro lidstvo? Každá situace má řešení ☺.

Význam Nashova ekvilibria

- Nabízí se otázka, proč máme mít Nashovo ekvilibrium, když je tak složité (skoro nemožné) ho prakticky vypočítat.
- V TH je otázka řešitelnosti hodnoty ekvilibria mnohdy irelevantní.
- NE postavilo základy mnoha dalších strategických modelů (kooperativní hry, mechanism design, evoluční biologie).

Otázky a úvahy, za jakých podmínek může existovat ryzí ekvilibrium, jsou ovšem stále zajímavé. Jakým způsobem se na stavu ekvilibrií podepíše např. diskretizace rozhodovacího prostoru. Jaký vliv má preferenční relace, tzn. forma užitkových funkcí a podobně.
Jisté je, že v počítačích asi nebudeme tvořit modely rozhodovacích situacích se spojitými množinami strategií.

Příště

- Hry v rozšířené formě (extensive-form games)
- Kooperativní hry.
- Opakované hry.