Doprovodné texty ke kurzu Teorie her

Martin Hrubý
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

zimní semestr, akad. rok 2010/11

Contents

Chapter 1

Předmluva

1.1 Předmět Teorie her na FIT VUT v Brně

Předmět Teorie her byl otevřen a poprvé přednášen na FIT VUT v Brně v akademickém roce 2009/10. V prvním roce si předmět zapsalo cca 110 studentů a absolvovala přibližně polovina. Z toho lze soudit reálnou kapacitu předmětu a počet zájemců o herně-teoretickou problematiku.

Předmět byl od počátku orientován na magisterské studenty, kde lze očekávat již jistou teoretickou přípravu, zkušenosti a nadhled. Pro další akademické roky je předmět Teorie her různě charakterizován v různých magisterských oborech: předmět je povinný v oborech Bioinformatika a biocomputing a Matematické metody v informačních technologiích. Povinně volitelný je v oborech Inteligentní systémy a Počítačové sítě a komunikace. V ostatních oborech magisterského studia je nabízen jako volitelný.

Na začátek si zodpovězme dvě otázky: co je Teorie her a co studium Teorie her přinese informatikovi?

> *Teorie her je značně multi-disciplinární věda, která zkoumá a matematicky popisuje situace, kdy se skupina inteligentních jedinců musí nějak rozhodnout, jejich rozhodnutí vede k nějakým důsledkům, které tyto jedince zajímají a jedinci mají zájem dosáhnout důsledků, které se z jejich pohledu jeví jako nejlepší.*

Existuje spousta definic Teorie her a spousta názorů, jak na tuto teorii nahlížet. Je každopádně jisté, že Teorie her nám přímo neříká, co konkrétně jedinci v jejich situaci opravdu udělají, a už vůbec nám negarantuje jistotu takové predikce. To v podstatě nikdo ani nechce. Teorie her nám umožní jejich situaci formálně popsat, analyzovat, pochopit a vyvodit pro sebe nějaký závěr o situaci. V rámci studia her budeme zkoumat individuální racionalitu jedinců při rozhodování, jejich možnosti, preference a užitek dosažený ve hře.

Když se na Teorii her podívá informatik, tak může říct, že Teorie her je varianta umělé inteligence nebo všeobecně metod modelování. Budeme pracovat s modely a mnohdy budeme chtít tyto modely počítačově zpracovávat do formy simulačních modelů. Dále může informatika zaujmout algoritmická náročnost některých problémů a tím i hledání pro ně efektivního algoritmického řešení. Samozřejmě se nabízí souvislost matematické teorie her a počítačových her (některé se dokonce nazývají strategické). Je dobré si hned na počátku přiznat, že předmět Teorie her (THE) není kurzem tvorby počítačových her. Ovšem počítačové hry v sobě obsahují prvky umělé inteligence a ty jsou založeny na zde zkoumaných teoriích. Obecně vzato může být studium her přínosné pro každého člověka, protože pozná modely mnoha každodenních lidských situací, pochopí, proč svět funguje zrovna tímto způsobem a to rozhodně není k zahození.

1.2 Přehled přednášek

Program přednášek v Teorii her na FITu má jako svůj cíl podat co možná nejširší záběr přes všechny problémy, které Teorie her řeší. V každé kapitole jsou diskutovány základy a nejdůležitější modely. Lze očekávat, že se v budoucnu program přednášek doplní o jednu až dvě nové kapitoly, jisté však je, že v přednáškách rozhodně zazní tato témata:

1. *Úvod do matematického rozhodování* – úvodní kapitola zavede pojmy strategie, zisk, užitek, preference a teorie optimální volby. Důležité je zejména pochopení pojmu preference a preferenční relace.

2. *Hry v normální formě s nenulovým součtem* – tento typ her je naprostým základem pro chápání strategických interaktivních situací. Zavede se většina nezbytných pojmů jako je strategie, hráč, hra, best-response, dominance strategií, ekvilibrium a další. Pochopení této kapitoly je klíčové pro studium her.

3. *Hry v normální formě s nulovým součtem* – speciálním případem her s nenulovým součtem jsou hry s nulovým součtem, ke kterým lze přistupovat mírně odlišným způsobem. Budou zavedeny základní metody analýzy těchto her. Jako vedlejší produkt této kapitoly bude vysvětlena metoda Lineárního programování, které je pro teorii her základním matematickým aparátem.

4. *Algoritmy pro řešení strategických her* – kapitola přinese naprosto stěžejní modely oligopolu dle Cournota a Bertranda, které stály na počátku úvah o podobě ekvilibria ve hrách s nenulovým součtem. Bude diskutován problém existence ekvilibria ve hrách s nenulovým součtem a proveden důkaz existence ekvilibria v konečných hrách. Současně s tímto budou zavedeny hry ve smíšených strategiích. V závěru budou předvedny základní postupy výpočtu Nashova ekvilibria ve smíšených strategiích.

5. *Hry v rozšířené formě* – hry v rozšířené formě se také nazývají sekvenční nebo dynamické hry. V těchto hrách se hráči střídají v tazích a hra je obecně provedena ve více akcích. Uvidíme

souvislost mezi sekvenční hrou a hrou v normální formě. Budou diskutovány problémy Stackelbergova ekvilibria, prvek důvěryhodné/nedůvěryhodné hrozby v herních situacích a forma ekvilibria ve hrách v rozšířené formě – tak zvané Sub-game Perfect Nash Equilibrium (SPNE).

6. *Vyjednávání a kooperativní hry* – v druhé části semestru připustíme, že hráči ve hře mohou spolu komunikovat a vyjednávat o volbě společné strategie, případně tvořit koalice. Kooperativní hry studují předpoklady, za jakých okolností hráči mohou kooperovat a jaké zlepšení zisku jim to přinese.

7. *Opakované hry* – bude dokázáno, že při opakování strategické interaktivní situace lze očekávat u hráčů tendence ke kooperativnímu jednání. Dokonce, pokud má hra nekonečný počet opakování (tj. hráči neznají okamžik posledního opakování hry), pak je jejich racionální volbou kooperovat.

8. *Korelované ekvilibrium ve strategických hrách s nenulovým součtem* – korelované ekvilibrium tvoří alternativu pro Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích. Prozkoumáme jeho interpretaci a algoritmus výpočtu.

9. *Mechanism design* – obtížně přeložitelný pojem, který lze interpretovat jako návrh pravidel ve strategických interaktivních situacích. Mechanism design bývá občas prezentován jako teorie her naruby. Jedná se o návrh pravidel hry takový, aby racionálním chováním hráčů bylo chovat se tak, jak si návrhář hry přeje. Obvykle je cílem dosáhnout stavu, kdy hráči chtějí dobrovolně prezentovat svou pravdivou preferenci o situaci. Jako nejtypičtější příklady těchto situací si předvedeme Teorii veřejné volby a Teorii aukcí.

10. *Teorie aukcí* – úvodní kapitola do Teorie aukcí bude formálně definovat základní aukční principy a poznatky o ekvivalenci mezi některými aukcemi. Aukce jsou velmi významnou složkou reálného života. Proto je velmi praktické rozumět chování v aukcích, například pro situace, kdy musíme nějakou aukci sami organizovat.

11. *Evoluční biologie* – evoluční biologie je překvapivá aplikace teorie her do zkoumání vývoje živočišných druhů a modelování jejich vzájemných interakcí. Kapitola bude vycházet z převratného článku J. M. Smithse, který poprvé použil pojmy teorie her pro vysvětlení různých fenotypů chování jedinců a zavedl klíčový pojem evolučně stabilní strategie.

12. *Theory of Moves* – mírně alternativní teorie tahů od Stevena Bramse.

13. *Rozbor případové studie* simulačního modelu založeného na teorii her. Tato kapitola nebude součástí skript. Jedná se o demonstraci teorie her v simulačním modelování elektroenergetických trhů v České republice, kterým se autor po léta zabývá.

1.3 Opakování matematických pojmů

Předmět THE od posluchačů nevyžaduje specializované znalosti matematiky, ale pouze základy a *především schopnost důkladně studovat předložené definice, věty a důkazy*. Předpokládá se přehledová znalost z oblasti diskrétní matematiky, algebry, matematické analýzy, teorie pravděpodobnosti a statistiky.

Přesto se hodí znovu vysvětlit základní pojmy, na kterých bude stavěno. Základním pojmem je pojem *množiny*. Bez potřeby hlouběji zkoumat teorii množin a různě abstraktní definice pojmu množina lze množinu vysvětlit jako matematický objekt A, pro který platí, že jsme schopni pro každý ($\forall$) libovolný objekt o jednoznačně určit, zda-li objekt o je nebo není prvkem A. Množinu tedy určuje vztah *být prvkem množiny*, což píšeme:

$$o \in A$$

a čteme "objekt o je prvkem množiny A" (patří do množiny) nebo naopak $o \notin A$ – "objekt o není prvkem množiny A" (nepatří do množiny). Zaveďme jako dohodu (notaci) množiny zapisovat s velkým počátečním písmenem (nebo slovem začínajícím velkým písmenem) a jejich prvky malým písmenem.

Pro informatiky je důležité zdůraznit, že množina není seznam. Pokud prvek patří do množiny, pak je v množině pouze jednou[1]. Co je dále důležité, je sdělení, že prvky v množině nemají *pořadí* (nejsou seřazeny). Proto by nikdy nemělo zaznít "Prvním prvkem množiny např. A je ...".

Množiny často zapisujeme výčtem prvků:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_x\}$$

Prázdnou množinu pak symbolem $\emptyset$. Zápisem $|A|$ budeme značit počet prvků množiny (kardinalitu množiny). Tedy, $|A| = x$, kde $x \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$. Ustálené množiny čísel budeme zapisovat zdvojeným písmem – $\mathbb{N}$ pro zápis množiny přirozených čísel, tedy integers (dále $\mathbb{N}^+, \mathbb{N}^-, \mathbb{N}^0$) a $\mathbb{R}$ pro zápis množiny reálných čísel, tedy floats.

Množinu často zapisujeme nějakou podmínkou, která platí pro její prvky, obecně

$$B = \{a \in A | condition(a)\}$$

Před svislou čarou je zápis množiny, ze které se vybírá (FROM, množina A) a za svislou čarou je daný "SELECT".

Pojem podmnožiny je jistě známý. Rozlišujeme ostrou podmožinu $A \subset B$ (tedy $|A| < |B|$) a neostrou $\subseteq$ (tedy $A = B \vee A \subset B$).

[1]...na rozdíl od multi-množiny, ovšem multi-množinu lze zapsat formou množiny dvojic (o, i) kde i značí počet opakování prvku o v množině

Důležitou množinou je tak zvaná *poteční množina*. Mějme například množinu A. Poteční množina množiny A se zapisuje výrazem 2^A a obsahuje jako své prvky všechny možné podmnožiny množiny A včetně prázdná množiny. Platí $|2^A| = |2^{|A|}$.

Zopakujme formální definice množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$) a množinového rozdílu ($\setminus$).

Definice 1. *Mějme dvě množiny A a B. Operace nad množinami sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$) a množinového rozdíl ($\setminus$) definujeme takto:*

- $C = A \cup B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \vee c \in B$
- $C = A \cap B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \wedge c \in B$
- $C = A \setminus B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \wedge c \notin B$ *resp.* $C = \{c \in A | c \notin B\}$

V mnoha zápisech budeme operátory $\cup, \cap, \sum$ používat s iterační proměnnou:

$$C = \bigcup_{i \in N} fun(i)$$

pokud je N množinou.

$$I = \sum_{i=1}^{N} fun(i)$$

pokud je N přirozené číslo a iterace probíhá od $i = 1$ do $i = N$ včetně, s krokem jedna. Pokud jsou tyto dvě alternativy čtenáři zřejmé, lze zkracovat na, jako např.:

$$I = \sum_{i}^{N} fun(i)$$

Kartézský součin (angl. product), relace

Kartézský součin (značíme operátorem $\times$) množin A a B je definován jako množina všech uspořádaných dvojic

$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Podstatné tedy je, že se jedná o množinu a jejími prvky jsou *uspořádané dvojice*. Uspořádaná N-tice je vektor prvků, kde tedy již na pořadí záleží, t.j. (a, b) je jiný objekt než (b, a). Kartézský součin může být libovolné dimenze, například definujeme

$$CC = A \times B \times C \times ... \times Z$$

S kartézským součinem souvisí pojem *relace*. Toto lidské slovo má opravdu hodně významů, ovšem pro matematiku je binární relace na množinách A a B podmnožinou kartézského součinu množin A a B (tzn. je to množina uspořádaných dvojic).

$$R \subseteq A \times B$$

Následující dva zápisy jsou ekvivalentní: $R \subseteq A \times A$, $R \subseteq A^2$.

Pro relace se ustálila následující notace. Pokud je $x \in R$ a $x = (a, b)$, pak občas píšeme aRb. Definujeme i n-ární relace $R \subseteq A \times B \times C \times ... \times Z$.

Příklad:

$A = \{1, 2, 3\}; B = \{x, y\}$

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

$R \subseteq A \times B$ např. $R = \{(1, x), (1, y)\}$

Nad relacemi definujeme několik charakteristik, které nám ulehčují vyjadřování o různých vlastnostech našich popisovaných jevů. Jsou to vlastnosti (provádíme výběr vlastností podstatných pro THE):

Definice 2. *Mějme relaci $R \subseteq A \times A$. Řekneme, že relace R je:*

- *úplná, pokud $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$ nebo oboje.*
- *reflexivní, pokud $\forall a \in A : aRa$.*
- *symetrická, pokud $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$.*
- *antisymetrická, pokud $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$, tzn. a i b jsou shodné prvky.*
- *tranzitivní, pokud $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.*

Důležitý je fakt, že relace může mít několik výše zmíněných vlastností současně. Kombinace těchto vlastností vede k pojmenování složených vlastností relací, jako jsou kvazi-uspořádání, úplné uspořádání, ekvivalence a podobně.

Další matematické znalosti

Předmět THE nevyžaduje u studentů znalosti matematiky, které by překračovaly rámec běžného informatického studia. Bylo by však dobré umět/chápat:

- Přečíst/pochopit matematický zápis – a především chápat, že matematický zápis nám zjednodušuje inženýrskou komunikaci a vede k jednoznačnému vyjádření našich myšlenek.
- Úpravy algebraických výrazů (odvozování, zjednodušování) – úpravy algebraických výrazů jsou uměním, které je třeba stále pěstovat a rozvíjet.

- Vyřešení lineární, kvadratické a jednoduché diferenciální rovnice. Základní řešení soustav lineárních rovnic.
- Derivovat funkce více proměnných a hledat extrémy funkcí – matematická analýza by pro inženýra měla být samozřejmostí.

V rámci studia THE bude probrána (možná) nová matematická metoda a tím je lineární programování. Lineární programování je soubor metod řešení optimalizačních úloh s lineárními omezujícími podmínkami a lineární hodnotící funkcí. Je to základ řešení mnoha herně-teoretických problémů.

Chapter 2

Úvod do herních pojmů

V této kapitole naznačíme základní problém rozhodování a tím je volba jedné alternativy z množiny dostupných alternativ. V umělé inteligenci a v THE se budeme snažit modelovat tyto okamžiky, kdy se inteligentní jedinec může nebo musí nějak rozhodnout. Základem rozhodování je pochopení a poznání možných alternativ ("... můžeš si vybrat to nebo to..."). Součástí našeho modelu bude především pak ten *výčet alternativ*. Nemůžeme zatím počítat s tím, že by si počítačový model inteligentního tvora sám tento výčet sestavil.

Každá akce má však reakci. Volba alternativy má svůj *důsledek* (později budeme mluvit o užitku). Budeme chtít modelovat, zda-li si jedinec tento fakt uvědomuje a jakým způsobem si ho uvědomuje. Budeme zkoumat, zda-li je schopen porovnat dva dosažitelné důsledky a rozhodnout se, který on považuje za lepší. Jinak řečeno, zda-li je schopen nějaký důsledek *preferovat* před jiným. Za jistých okolností lze zaměnit zkoumání preferencí nad důsledky se zkoumání preferencí nad alternativami.

Jako výsledek této kapitoly definujeme okolnosti, za kterých je jedinec schopen provést racionální rozhodnutí nad množinou alternativ, tedy rozhodnutí, které mu přinese nejlepší dosažitelný důsledek. Později uvidíme, že to nemusí být nutně absolutně nejvyšší důsledek (užitek), ale budeme spíše mluvit o *optimálním užitku*.

2.1 Úvod do Teorie volby (Theory of Choice)

V Teorii volby i v Teorii interaktivního strategického rozhodování (Teorie her) jedinec provádí rozhodnutí, což je jaksi *zdůvodnitelná volba* jedné z jeho možných voleb (akcí, tahů, strategií).

Můžeme zkoumat, zda-li jedinec dojde ke svému rozhodnutí pomocí nějaké *racionální úvahy* nebo volí-li svůj tah *náhodně*. Jedinec volící svůj tah náhodně je v TH nazýván příroda (angl. the nature). Hry s takovým hráčem jsou pak nazývány "hry proti přírodě". Tímto aspektem her se však budeme zabývat pouze velmi okrajově.

V Teorii her se budeme z větší části zabývat hráči, kteří pro své rozhodnutí mají nějaký důvod a ke svému rozhodnutí dojdou nějakou matematicky podložitelnou úvahou. Takové hráče budeme nazývat racionálními. Pojem racionality je pro TH klíčový a bude mu věnována pozornost v následující kapitole.

Základem pro racionální úvahu je pochopení faktu, že každé rozhodnutí má svůj důsledek. Důsledek rozhodnutí je v TH podobně důležitý fenomén jako samotná racionalita a velmi úzce spolu souvisí. Důsledek je vyjádřen formou nějakého kvantifikovatelného užitku nebo také zisku. V THE budeme pojmy užitek a zisk obvykle směšovat, pouze v některých kapitolách budeme odlišovat objektivní zisk a vnímání užitku ze zisku (například v první přednášce, v rámci kapitoly o Teorii užitku). V anglické literatuře bývají tyto pojmy označovány jako payoff nebo utility.

Nyní si formálně definujeme rámec rozhodování jedince.

Mějme jedince provádějícího rozhodnutí o volbě své akce z množiny akcí $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Předpokládejme, že jedinec má dostatek informací o dané situaci takový, že je schopen definovat množinu veškerých důsledků svých rozhodnutí $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Jedinec je dále schopen jednoznačně přiřadit každé své volbě $a \in A$ právě jeden důsledek $x \in X$. Matematicky tento fakt modelujeme funkcí (například nazývanou funkcí užitku), která přiřazuje akcím $a \in A$ právě jeden důsledek z množiny X

$$u : A \to X$$

Máme tedy množinu možných akcí A, množinu možných důsledků X a nyní potřebujeme vodítko pro volbu, kterou budeme chápat jako *racionální*.

Racionalita má několik definic. Jedna z nich říká, že racionálně chovající se jedinec volí svou akci po důkladném zvážení veškerých důsledků. Další říká, že racionální jedinec maximalizuje svůj zisk. Zisk chápame obvykle jako číselné vyjádření například formou peněz. U takového vyjádření každý jedinec seznámený s penězi chápe, že 100 Kč je víc než 10 Kč. Chápe to proto, že je schopen obě hodnoty *porovnat*.

Schopnost porovnávání dvou možných výsledků proto bude základ pro racionální rozhodování.

Dodejme, že pokud je funkce u bijektivní (vzájemně jednoznačné zobrazení), což značí, že u je jednoznačné (pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $x \in X$, že $u(a) = x$) a současně "na množinu" (pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $a \in A$, že $u(a) = x$), pak je jedno, zda-li mluvíme o zkoumání optima na množině důsledků nebo na množině alternativ. Je to jednoduché, pokud by existovaly dvě alternativy vedoucí ke stejnému důsledku, jsou pro jedince v zásadě totožné. Věnujme se proto, zatím, zkoumání preferencí na množině alternativ.

Dříve, než zavedeme pojem maxima (tzn. cestu k maximalizaci zisku), budeme definovat pojem *jedincovy preference*. V obecné mluvě chápeme preferenci jako nějakou formu priority. Řekneme, že obyvatel Vyškova preferuje vyškovské pivo, ale míníme tím, že Vyškovan konfrontován s volbou vyškovské versus kterékoliv jiné pivo vždy volí svou domácí značku. V tomto vyjádření implicitně chápeme výsledek případných konfrontací, ale matematicky toto musíme zdůraznit. *Zdůrazňujeme to zavedením preferenční binární relace nad množinou alternativ.*

Preferenční relace $R \subseteq A \times A$ je tedy množina dvojic (a_1, a_2), které interpretujeme tak, že a_1 je preferováno nad (před) a_2. Řekneme rovnou, že v teorii volby a v TH obecně se pro lepší obecnost zavádí tak zvaná *slabá preference* (angl. weak preference), která se interpretuje tak, že je-li $(a_1, a_2) \in R$, což také píšeme $a_1 R a_2$, pak jedinec nepreferuje a_2 nad a_1, nebo-li v kladné mluvě řečeno, chápe a_1 jako lepší nebo stejně dobrou akci jako a_2. Pro lepší představu srovnejme slabou preferenci s matematickým operátorem $\geq$ nad čísly (což je opět relace a dokonce relace se stejnými vlastnostmi jako slabá preference). V TH je také často tímto operátorem slabá preference zapisována.

Pokud by nám chyběla silnější/radikálnější forma preference, můžeme zavést relaci striktní preference (budeme ji označovat P).

Definice 3. *Mějme hráče s množinou alternativ A a relací slabé preference $R \subseteq A \times A$. Řekneme, že jedinec striktně preferuje a_1 nad a_2 (tedy $a_1 P a_2$), pokud platí*

$$a_1 R a_2 \wedge \neg a_2 R a_1$$

Jinak řečeno, pokud $(a_1, a_2) \in P$, pak $(a_1, a_2) \in R$ a současně $(a_2, a_1) \notin R$. Podobně zavedeme relaci indiference I (doslova – nerozlišitelnosti), tedy:

Definice 4. *Mějme hráče s množinou alternativ A a relací slabé preference $R \subseteq A \times A$. Řekneme, že jedinec je indiferentní mezi dvěma různými a_1 a a_2 (tedy $a_1 I a_2$), pokud platí*

$$a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_1$$

Jaké musí mít relace slabé preference vlastnosti, aby dala jedinci návod k racionální volbě? Stále předpokládáme, že jedinec plánuje zvolit akci, která bude nejlepší ze všech možných, tedy nebude existovat jiná akce, kterou by strikně preferoval nad svojí volbou. Chceme totiž najít nějaké maximum.

Definice 5. *Pro relaci slabé preference R a množinu alternativ A definujeme maximální množinu $M(R, A) \subset A$ tak, že*

$$M(R, A) = \{x \in A | xRy; \forall y \in A\}$$

Maximální množina $M(R, A)$ je tedy tvořena takovými prvky $\subseteq A$, že neexistuje prvek $y \in A \setminus M(R, A)$ takový, že by byl preferován nad nějakým prvkem z $M(R, A)$.

Existuje pro jedincovu rozhodovací situaci vždy maximální množina? Jaké vlastnosti musí splňovat jedincova preferenční relace, aby maximální množina existovala? Maximální množina je návod pro hledání maxima na množině alternativ, ale existuje pouze tehdy pokud preferenční relace tvoří uspořádání na množině alternativ, je tedy úplná, reflexivní a tranzitivní.

Pro to, aby preferenční relace měla maximální množinu jsou nejdůležitější její vlastnosti úplnost a tranzitivita. Úplnost relace je vlastnost říkající, že pro každé dvě různé alternativy $a_1, a_2 \in A$ platí buď a_1Ra_2 nebo a_2Ra_1 nebo platí oboje současně. Z hlediska interpretace této vlastnosti tím míníme stav, kdy hráč má názor na preferenci nad všemi svými alternativami. Tento fakt se může jevit jako naprosto přirozený, ale spousta psychologů zde namítá, že tento požadavek není až tak samozřejmý. Zkusme si vzpomenout, kdy v některých situacích říkáme "nevím" nebo "na toto nemám názor" nebo "nemůžu si vybrat z těchto variant".

Pokud hráčova preferenční relace splňuje úplnost, pak ještě navíc musí mít určitou vnitřní logickou konzistenci. Ta je vyjádřena požadavkem tranzitivity relace, která říká, že pokud máme a_1Ra_2 a současně a_2Ra_3, pak rozhodně musí být dvojice (a_1, a_3) prvkem preferenční relace. Pokud tedy jedinec preferuje Plzeň nad Radegastem, a Radegast nad Starobrnem, rozhodně by neměl pochybovat o preferenci Plzně nad Starobrnem. Pokud přesto $(Starobrno, Plzen) \in R$, pak jedinec nemá šanci provést rozhodnutí, neboť se mu preference zacyklí $Plzen \geq Radegast \geq Starobrno \geq Plzen$.

Tyto vlastnosti (úplnost, reflexivita, tranzitivita) u preferenční relace dělají z preferenční relace úplné neostré uspořádání (angl. weak ordering).

Definice 6. *Mějme relaci $R \subseteq A \times A$. Pokud je R úplná, tranzitivní a reflexivní, pak tvoří úplné neostré uspořádání na množině A.*

Věta 1. *Je-li A konečná neprázdná množina a R úplné neostré uspořádání na A, pak $M(R, A) \neq \emptyset$.*

Proof. Nechť A je konečná množina a R je úplná, reflexivní a tranzitivní relace. Důkaz bude proveden matematickou indukcí.

Krok 1: Je-li A jednoprvková množina, tedy $A = \{a\}$, pak z reflexivity plyne aRa a proto $M(R, A) = \{a\}$.

Krok 2: Ukážeme, že je-li tvrzení pravdivé pro A' s n prvky a relaci R' na A', pak musí být pravdivé i pro libovolnou A s $n + 1$ prvky a uspořádání R.

Důkaz kroku 2: Budeme pracovat s množinami A a A', kde $A = A' \cup \{a\}$. Na množinách A a A' jsou definovány uspořádání R a R' tak, že R' je R omezená na A', tedy $R' = R \cap (A' \times A')$.

Dle našich předpokladů (a dle postupu matematické indukce) je $M(R', A') \neq \emptyset$. Pak z předpokladů úplnosti preferenční relace plyne, že pro libovolné $y \in M(R', A')$ platí buď yRa nebo aRy nebo platí oboje. Budeme proto zkoumat dvě varianty preferencí y a nově přidané alternativy a:

1. Platí yRa neboli prvky maxima na A' jsou preferovány nad novým prvkem a. Pak tedy yRz pro všecny $z \in A' \cup \{a\}$ (z definice maximální množiny) a proto $y \in M(R, A)$. A tím dokazujeme krok 2.

2. Platí aRy. Pokud tedy $y \in M(R', A')$, pak yRz pro libovolné $z \in A'$. Vycházíme z aRy a víme, že yRz pro všechny $z \in A'$. Z tranzitivity R plyne aRz pro všechny $z \in A'$. Obecně to implikuje aRw pro všechny $w \in A'$ a proto $a \in M(R, A)$ a to opět dokazuje krok 2.

Principem matematické indukce jsme dokázali tuto větu pomocí kroků 1 a 2.

□

2.2 Teorie užitku

Pokud důsledek nějaké akce chápeme jako zisk, pak je nutno zkoumat, jaký nám ten zisk přinese užitek. Je jasné, že zisk tisíce CZK je pro každého člověka stejný zisk tisíce CZK. Chudému člověku však tento zisk přinese větší užitek než miliardáři.

Užitek je v ekonomii chápán jako subjektivní míra uspokojení plynoucí ze spotřeby statků.

Než začneme zkoumat zisk a užitek, zavedeme si dva způsoby zkoumání dvou odlišných důsledků x a y:

- Ordinalistický přístup – poznáme, že x je lepší než y nebo naopak nebo jsou oba stejné. Takto jsme schopni porovnávat alternativy.
- Kardinalistický přístup – kromě prostého porovnání x a y, kde je např. x lepší než y, jsme navíc schopni vyčíslit, kolikrát je x lepší než y. Jsme tedy schopni kvantifikovaně vyjádřit rozdíl $|x - y|$.

Řekli jsme, že za předpokladu bijektivnosti užitkové funkce $u : A \to X$ si můžeme zvolit, zdali budeme hledat maximum na alternativách nebo důsledcích. Pro pořádek si zaveďme relaci slabé preference na důsledcích:

Definice 7. *Mějme množinu alternativ A, množinu důsledků X, užitkovou funkci u z A na X a relaci slabé preference $R \subseteq A \times A$.*

Nechť potom:

- $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow xRy$
- $u(x) > u(y) \Leftrightarrow xPy$
- $u(x) = u(y) \Leftrightarrow xIy$

A dále:

Definice 8. *Mějme množinu alternativ A a preferenční relaci $R \subseteq A^2$. Řekneme, že užitková funkce $u : A \to \mathbb{R}$ reprezentuje R, pokud pro všechny $x, y \in A : u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow xRy$.*

Přechod od zkoumání preferencí nad alternativami ke zkoumání nad důsledky ještě sám o sobě neumožňuje kardinalistický přístup, tedy vyhodnocení rozdílu $|u(x) - u(y)|, \forall x, y \in A$. Proto budeme obvykle klást $X = \mathbb{R}$, tedy $u : A \to \mathbb{R}$ a formulovat důsledky (nyní již zisky) reálnými čísly. Dodejme, že následující algoritmy teorie her právě zkoumají míru rozdílu zisku mezi dvěma alternativami.

Maximální množinu lze již pak definovat velmi intuitivně, a sice jako:

$$M(u, A) = arg \max_{a \in A} [u(a)]$$

Přechodem od ordinalistického zkoumání preferencí nad alternativami ke kardinalistickému zkoumání nad číselnými zisky se algoritmy rozhodování sice zjednodušují, ale problém modelování situace se přesouvá k validnímu ohodnocení důsledku volby jedince tak, aby ohodnocení bylo sjednocující pro všechny hráče ve hře. To je ovšem už problém samotného modelování rozhodovacích situací a pro úvodní studium her je tato poznáma značně předčasná.

2.2.1 Užitek ze zisku

Jako demonstraci zkoumání vztahu mezi ziskem a užitkem si ukážeme tak zvaný St. Petersbourg paradox vyslovený Danielem Bernoullim v roce 1738.

Mějme hru mezi účastníkem a bankéřem, kde účastník zaplatí vstupní poplatek c a pak háže mincí tak dlouho, dokud nepadne hlava. Bankéř souhlasí, že mu zaplatí 1 dukát, pokud padne v prvním hodu, 2 dukáty v druhém hodu, 4 v třetím hodu, atd.

Očekávaný zisk hráče tedy musí být nekonečný:

$$E = (-c) + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}4 + \frac{1}{16}8 + ... + = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Problém je, že s tímto většina reálných lidí nesouhlasí a za svou účast by nezaplatili více než 20 dukátů, dokonce by radostně prodali svou účast ve hře za 20 dukátů. Jak je toto možné? Proč většina lidí preferuje jistotu dvaceti dukátů před teoreticky nekonečným ziskem?

St. Petersbourg paradox vyvolal diskuzi, jaký je vlastně užitek z přijetí nějakého (např. finančního) vstupu. Gabriel Cramer při korespondenci s D. Bernoullim prohlásil, že lidé hodnotí finanční částky podle užitku, který jim přinesou. Doplnil následující předpoklad: jakákoliv částka přesahující 2^{24} dukátů člověku připadá stejná jako 2^{24} dukátů.

Pak je očekávaný užitek hry:

$$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}4 + ... + \frac{1}{2^{24}}2^{23} + \frac{1}{2^{25}}2^{24} + \frac{1}{2^{26}}2^{24} + ... + =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 12 + 1 = 13$$

Potom je realisticky očekávaný užitek ze hry 13 dukátů.

Daniel Bernoulli pokračoval ve své úvaze dále. Definoval počet jednotek užitku $u(x)$ z vlastnictví částky x. Podle něj, při navýšení majetku z x na $x + dx$ je přírustek užitku $du(x)$ přímo úměrný přírustku dx a nepřímo úměrný dosavadnímu majetku x (dále bude α značit počáteční majetek a $b \in \mathbb{R}^+$ berme jako nějaký subjektivní koeficient vnímání přírustku). Podotkněnme, že tento způsob vnímání užitku se nazývá *Logoritmický užitek*.

$$du(x) = \frac{b\,dx}{x}$$

Po integraci celé rovnice obdržíme:

$$u(x) = b \ln x + c; c \in \mathbb{R}$$

Integrační konstantu c vyjádříme jako vnímání počátečního majetku α a formulujeme stejným způsobem jako přírustek majetku.

$$u(x) = b \ln x - b \ln \alpha = b \ln \frac{x}{\alpha}$$

což obecně vyjadřuje užitek $\ln(\text{po akci}) - \ln(\text{před akcí})$. Když nyní vyjádříme očekávaný užitek ze hry pomocí logaritmického užitku, dostáváme (ovšem bez připomínky G. Cramera o hraničním majetku):

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} b \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} =$$

$$= b \ln [(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ...] - b \ln \alpha$$

Kolik tedy musí hráč vyhrát, aby jeho užitek byl kladný? Částka D, jejíž přidání k počátečnímu majetku přinese stejný užitek jako užitek z výhry ve hře je dána vztahem, kde na levé straně rovnice máme užitek z přírustku D a na pravé užitek z výhry:

$$b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} = b \ln \left[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ... \right] - b \ln \alpha$$

z toho plyne, že takové D je:

$$D = \left[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ... \right] - \alpha$$

Pro nulové $\alpha = 0$ počáteční jmění je $D = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdots = 2$. Mít nulový počáteční majetek, tak nezaplatím za učast ve hře víc než dva dukáty.

Promyslete si, jaký užitek přinese hra hráči s nenulovým počátečním majetem α.

2.3 Důležité poznatky

Provedeme výčet důležitých poznatků na závěr kapitoly o volbě a užitku:

- Jedinec se rozhoduje nad volbou jedné z množiny alternativ A.

- Pokud má být jedincova volba racionální, musí nad množinou alternativ A definovat relaci slabé (neostré) preference R, která musí být úplná, reflexivní a tranzitivní.
- Pokud preferenční relace splňuje tyto tři vlastnosti, existuje na ní maximální množina $M(R, A)$, která obsahuje pro jedince optimální volby.
- Alternativně můžeme každé volbě alternativy přisoudit kvantifikovatelný důsledek (zisk, užitek) formou užitkové funkce $u : A \to \mathbb{R}$. Větší část THE pracuje s užitkovými funkcemi, kde jsou preference evidentní.
- Někdy chceme zkoumat subjektivní užitek z nějakého objektivního zisku.