Doprovodné texty ke kurzu Teorie her

Martin Hrubý
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

zimní semestr, akad. rok 2010/11

Contents

Chapter 1

Úvod do Teorie her

Tato kapitola je základem pro studium herních situací. Bude definován pojem hra, informace ve hře a ekvilibrium.

1.1 Herní situace

Hrou se rozumí strategická interaktivní situace zahrnující alespoň dva hráče, kde každý sleduje své vlastní cíle a projevuje tak svou *individuální racionalitu*. Hry jsou matematické modely situací, kdy hráči zúčastnění v situaci jsou nuceni provést nějaké rozhodnutí. Nezkoumáme, zda-li se hráčům líbí být účastníky dané situace, zda chtějí hrát nebo nechtějí. Hra je model, a proto je zjednodušením situace na několik základních prvků, které situaci popisují.

Jsou to tyto prvky:

1. *Hráči* zúčastnění ve hře. Od nich se očekává provedení jejich rozhodnutí.

2. Popis možných *akcí*, které hráči mohou provést. Pojem akce, strategie, alternativa jsou zde používány jako synonyma. Pokud bychom přesto chtěli mezi nimi rozlišovat, pak řekneme, že literatura používá pojem strategie jako formální vyjádření hráčova rozhodnutí a pojem akce, pokud chce zdůraznit, že strategie vede k nějaké aktivitě hráče.

3. Vyjádření *důsledků akcí* hráčů. Budeme zde mluvit o *užitkových* nebo *výplatních funkcích*.

4. Model míry *informace*, jakou hráči mají o zkoumané situaci. Tento fakt je ve hrách zásadní. Budeme definovat pojmy *společná znalost* (angl. common knowledge) a *úplná informace* (angl. complete information) o hře.

5. Předpokládaný průběh hry. V zásadě existuje dvojí přístup k odehrání hry – hra jedno-tahová a více-tahová. O více-tahových hrách bude pojednávat kapitola ”Hry v rozšířené formě”.

6. Možnosti komunikace hráčů a tvorby společné dohody o volbě strategie.

Obecně se hry dělí na *kooperativní* (angl. cooperative games) a *nekooperativní* (angl. non-cooperative games) podle toho, jak mohou hráči spolupracovat, resp. komunikovat při volbě své akce. V obou případech však předpokládáme u všech hráčů naprosto striktně jejich orientaci na optimalizaci vlastního zisku ze situace. Literatura často také hovoří o sobeckém chování hráčů (selfish agents), ovšem zde nelze pojem sobeckosti chápat jako něco negativního v mezilidských vztazích, spíše jako zdůraznění ryzí individuální racionality. Pokud budeme přesto zkoumat interaktivní situace, kde lze u některých hráčů pozorovat uspokojení ze zisku jejich protihráčů (např. situace rodič verus dítě), pak je toto uspokojení zahrnuto v zisku rodiče a dále pak zkoumáme tohoto hráče z hlediska jeho individuální racionality.

Kooperativní a nekooperativní hry jsou naprosto odlišné v pojetí strategie a způsobu provedení hry. U nekooperativních her vidíme hráče, jejich strategie a užitkové funkce. Předpokládáme, že hráči o hře nekomunikují, ale přesto přemýšlí o tahu svých protivníků. Studiem těchto her dojdeme posléze k poznání, že výsledek hry by pro všechny zúčastněné hráče mohl být (mnohdy i značně) lepší, pokud by se domluvili na společné akci. Otvírají se tak možnosti komunikace, vyjednávání a kooperace. U kooperativních her uvidíme, že v sobě obsahují nekooperativní podstatu a že kooperace je možná pouze pokud všichni hráči vidí případné zlepšení svého možného výsledku hry plynoucí z komunikace.

V teorii volby (předchozí kapitola) jsme zavedli hráčovy akce (strategie) a jejich možné důsledky. Ukázali jsme hráčovy preference, ať už na množině strategií nebo na množině užitků. V herně teoretické praxi je častější vnímat preference na množině užitků, které jsou kvatifikovány do čísel a intuitivně porovnatelné. Proto budeme nadále již mluvit o strategiích a užitkových funkcích.

Zavedeme si nyní formální definici nekooperativní hry N hráčů. Podotkněme, že symbol N bude v tomto textu používán výhradně pro označení počtu hráčů ve hře.

Definice 1. *Strategická nekooperativní hra N hráčů je $(2N+1)$-tice*

$$\Gamma = (Q; S_1, S_2, ..., S_N; U_1, U_2, ..., U_N)$$

kde:

- $Q = \{1, 2, ..., N\}$ *je konečná množina hráčů ve hře.*
- $S_i, i \in Q$ *jsou (konečné) množiny ryzích strategií hráčů* $i \in Q$*.*
- $U_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_N \to \mathbb{U}$ *jsou funkce užitku hráčů.*

Symbolem Q bude vždy označována množina hráčů. Symbolem S_i bude vždy označována množina strategií hráče $i \in Q$.

Všimněme si nyní funkcí užitku U_i. V této definici má každý hráč svoji funkci užitku. Alternativně je možno psát $U : S_1 \times S_2 \times ... \times S_N \to \mathbb{U}^R$, ovšem tento zápis není zaveden, poněvadž často pracujeme s jednotlivými užitky hráčů. Podstatným faktem užitkové funkce je její definiční obor definovaný jako kartézský součin množin strategií všech hráčů:

$$S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$$

což také často píšeme zkráceně jako

$$S = \prod_{i \in Q} S_i$$

Množina S je významným popisem hry, neboť modeluje veškeré možné výsledky hry. Tuto množinu nazýváme *množinou strategických profilů* hry a její prvky $(s_1, s_2, ..., s_N)$ pak *strategickými profily*. Užitkové funkce hráčů jsou definovány na množině profilů proto, že užitek hráče není dán pouze jeho rozhodnutím $s_i^* \in S_i$, ale i tahy jeho protihráčů $s_{-i}^* \in S_{-i}$.

Vedle množiny S je velmi významnou (a v budoucím textu často citovanou) množinou množina sub-profilů. Množinou sub-profilů z hlediska hráče i je

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_N$$

tedy zkráceně

$$S_{-i} = \prod_{j \in Q \setminus \{i\}} S_j$$

Sub-profil $s_{-i} \in S_{-i}$ modeluje kontext rozhodování hráče i. Je to vektor konkrétních tahů jeho protihráčů. Zápisem (s_i, s_{-i}) budeme rozumět složení strategie s_i hráče i s kontextem protihráčů s_{-i} – tedy $(s_i, s_{-i}) \in S$.

Oborem hodnot užitkové funkce hráče může být jakési univerzum $\mathbb{U}$, ale ve většině případů klademe $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ a užitky považujeme za reálná čísla. Tím je dáno i vnímání preferencí hráčů nad dosažitelnými užitky.

V dalším textu zavedeme jisté stochastické rozšíření nekooperativní hry a tudíž i novou formu strategií. Abychom rozlišili tyto výše uvedené strategie a ty budoucí rozšířené, zavedeme přesnější označení strategií hráčů – budou to tak zvané ryzí strategie (angl. pure strategies). Pokud bude v dalším textu použit pojem strategie, pak je závislý na daném kontextu textu, implicitně však je míněna ryzí strategie.

Tímto jsme zavedli definici nejobecnějšího pojetí strategické hry. Veškeré následující hry (s nulovým/nenulovým součtem, sekvenční, kooperativní, aukce, volby, trhy, evoluce) budou varianty této definice.

1.1.1 Rozdělení her

Může být praktické již v počátku provést rozdělení herních situací do kategorií. Základním dělením je pohled kooperativnosti:

- *Nekooperativní* hry – vyjadřujeme strategie hráčů a jejich užitkové funkce.
  - Hry v normální formě (strategické hry, maticové hry)
    - ... s nenulovým součtem.
    - ... s nulovým součtem.
  - Hry v rozšířené formě (extensive-form games, dynamické hry, sekvenční hry).
- *Kooperativní* hry dané charakteristickou funkcí v – vyjadřujeme možné koalice hráčů z množiny 2^Q a ohodnocení jednotlivých koalic daný tak zvanou charakteristickou funkcí $v : 2^Q \to \mathbb{R}$, tedy užitek, který koalice získá tím, že se zformuje z hráčů. V dalším dělení těchto her nacházíme:
  - Hry s přenositelným užitkem (angl. transferable utility, TU-games).
  - Hry s nepřenositelným užitkem (tyto ovšem v THE nebudeme studovat).

Aby bylo už od počátku jasné, co znamená nulovost/nenulovost součtu, zavedeme definici hry s konstantním součtem a na jejím základě hru s nulovým součtem:

Definice 2. *Mějme strategickou hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Hru Γ nazveme hrou s konstantním součtem, pokud existuje $k \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$\forall s \in S : \sum_{i \in Q} U_i(s) = k$$

Pokud je hra s konstantním součtem $k = 0$, pak se hra nazývá hrou *s nulovým součtem*. Podotkněme, že pokud je hra s konstantním součtem $k \neq 0$, pak je možno ji převést na strategicky ekvivalentní hru s nulovým součtem (více v kapitole o hrách s nulovým součtem).

> **Pokud neexistuje k takové, aby platila výše zmíněná definice, pak se jedná o hru s nenulovým součtem.** Jinak řečeno součet $\sum_{i \in Q} U_i(s)$ je v každém profilu s hry obecně jiný[1].

[1]Studenti občas mylně uvadí, že hra s nenulovým součtem je hra se součtem $k \neq 0$.

1.1.2 Jak se hraje nekooperativní strategická hra?

Časem zavedeme nekooperativní hry v tak zvané rozšířené formě, kde se hráči střídají ve svých tazích jako například ve hře v šachy. Uvidíme však, že takovou hru lze převést na nejobecnější vyjádření nekooperativní strategické hry.

Nekooperativní strategická hra je také často nazývána jako hra v normální formě (angl. normal-form game). Další synonymum je *hra v maticové formě*, protože užitky ve strategických hrách zapisujeme přehledně do N-dimensionálních matic. Tato hra je modelem situace, kde hráči provedou pouze jedno rozhodnutí a tím je volba jejich strategie. Podstatné je, že o své volbě hráči nevedou žádná vyjednávání a nejsou schopni pozorovat tahy svých protihráčů. Modelujeme to jako současné provedení akcí u všech hráčů.

Pro názornou představu zaveďme nezávislého soudce (arbitra), kterému hráči $i \in Q$ předají zprávu o svém zvolené strategii $s_i^* \in S_i$ v zalepené dopisní obálce, to znamená způsobem, který nedovoluje ostatním pozorovat, co protihráči zvolili. V okamžiku, kdy má arbitr obálky od všech hráčů, obálky otevře a oznámí strategický profil $s^* = (s_i^*)_{i \in Q}$, který hráči zvolili (ten je přece složen ze strategií s_i^* všech hráčů $i \in Q$). Podle zvoleného profilu a užitkových funkcí hráčů hráči i obdrží zisk $U_i(s^*)$. Tímto je hra ukončena.

Všimněme si nyní, že není možná žádná oprava zvolených strategií. Předpokládáme, že hráči tento fakt chápou a volí svou strategii uváženě[2]. Proces úvahy o volbě strategie může být velmi složitý. Výsledný profil by měl být jedním z možných rovnovážných bodů hry (ekvilibrium). Výsledný profil hry budeme nazývat výsledek/výstup hry (angl. outcome).

> Ekvilibrium je matematický model výsledného chování hráčů, něco na způsob predikce výsledku zkoumané situace. Bylo by dobré již v počátku studie her přijmout poznání, že teorie her není obecně schopna predikovat výsledek chování hráčů v každé reálné situaci. Přináší ale nástroje analýzy hry a návod k pochopení zkoumané situace. Vazbou mezi teoretickou podobou teorie her a reálným zkoumáním opravdového chování hráčů se zabývá experimentální teorie her. Ta také ukazuje, kde se teorie liší od praxe a za jakých okolností jsou teoretické výsledky shodné s praxí.

The Ultimatum game

Jednou takovou značně zkoumanou strategickou situací je tak zvaná Ultimatum game. Předpokládejme dva hráče A a B. Hráč A má za úkol navrhout rozdělení deseti mincí mezi hráče sebe a hráče B. Pokud hráč B s rozdělením souhlasí, obdrží oba dle dohody své mince. Pokud hráč B s rozdělením nesouhlasí, mince propadnou a nikdo nemá nic. Teoreticky by měl hráč B souhlasit s jakýmkoliv

[2] Tento fakt je zdrojem mnohých zklamání v běžném životě. Z experimentů s reálnými respondenty mnohdy vyplývá, že reální jedinci při volbě strategie nejsou schopni pochopit fakt, že se situace už nebude opakovat. Model je však zjednodušení, a proto u strategických her striktně předpokládáme natolik důkladnou racionalitu, která fakt jednotahovosti respektuje.

rozdělením, které mu určí nenulový počet mincí. Dokonce je ekvilibriem v této hře rozdělení 9 mincí pro A a 1 pro B. Experimenty s reálnými lidmi ukazují, že B návrh odmítne, pokud nedostane alespoň 40% rozdělovaného majetku. Je takovou perličkou, že opice se více blíží teoretickému ekvilibriu, neboť opice B vždy přijme 1 minci a některé druhy opic dokonce v polovině případů i souhlasí s nulovým podílem (logicky, pokud mám dostat nula z rozhodnutí protihráče nebo svým odmítnutím, pak jsem indiferentní vůči oběma alternativám a rozhoduji náhodně s rovnoměrnou pravděpodobnostní distribucí nad strategiemi – tady taky dostáváme první příklad oněch zmíněných smíšených strategií). Obecně platí, že čím je zkoumaný inteligentní tvor jednodušší, tím více jeho chování odpovídá matematickým modelům. To jenom potvrzuje předpoklad, že herní model je zjednodušení rozhodovací situace.

1.2 Informace ve hře

V rozhodovacích situacích je pochopitelně klíčovým faktem míra znalostí hráčů o situaci. Abychom správně modelovali postup hráče při jeho racionální úvaze, musíme vytvořit i validní model jeho informovanosti o situaci. Co všechno by měl hráč vědět, aby se mohl rozhodnout, respektive, abychom my byli schopni predikovat jeho rozhodnutí? Nabízí se, že musí vědět o svých protivnících, musí znát jejich strategie a musí znát svoje a jejich užitkové funkce. Stačí to však na to, aby jeho znalost o hře byla jaksi kompletní?

Zavede si nyní pomocný pojem *společná znalost* (angl. common knowledge). Formální definici je možno najít v článku[3], my se zde spokojíme s poněkud volnějším objasněním pojmu common knowledge:

Definice 3. *Mějme dva hráče A a B. Událost E je pro hráče $\{A, B\}$ common knowledge, pokud:*

- *... hráči $\{A, B\}$ oba ví o události E,*
- *... hráč A ví, že B ví o události E,*
- *... hráč B ví, že A ví o události E,*
- *... hráč A ví, že B ví, že A ví o události E,*
- *... hráč B ví, že A ví, že B ví o události E,*
- *takto až do nekonečného zanoření.*

Jako příklad common knowledge si uveďme situaci dvou vojevůdců, kteří jsou se svými tábory rozloženi na protilehlých kopcích. Vojevůdci by se rádi se svými armádami utkali, ale ví, že pokud

[3] Aumann, R: Agreeing to Disagree, The Annals of Statistics, Vol. 4, No. 6. (Nov., 1976), pp. 1236-1239.

jeden sestoupí do údolí a druhý zůstane na kopci, tak ten sestoupivší bude ve strategické nevýhodě. Mohou se tedy utkat jedině za předpokladu, že sestoupí oba současně. Proto se musí informovat o místě a času bitvy. Vojevůdce A tedy vyšle k vojevůdci B posla s oznámením o zítřejší bitvě. Vojevůdce ovšem neví, zda-li posel k protihráči dorazil. Zatím je tedy ve stavu, že on sám je informován o události E. Řekněme, že posel dorazil k druhému vojevůdci a informoval o E. Nyní oba ví o stavu E. Ovšem vojevůdce A instruuje posla, aby se vrátil s potvrzením od vojevůdce B o tom, zda-li B souhlasí s plánem E. Dokud mu to posel nepotvrdí, nelze mluvit o dohodě. Posel ovšem na cestě od B k A může dezertovat, a tak i B má zájem vědět, zda-li se A dozvěděl o jeho potvrzení. S každým přeběhnutím mezi vojevůdci narůstá jejich jistota, že oba událost E akceptovali. Aby však jistota dosáhla stavu common knowledge, musel by posel běhat nekonečně krát.

Pojem common knowledge použijeme pro definici úplné informace ve hře (angl. complete information).

Definice 4. *Mějme hru* $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. *Pokud jsou pro všechny zúčastněné hráče* Q *následující informace common knowledge:*

- *struktura hry* Γ *(tedy množiny* Q *a* $\{S_i\}_{i\in Q}$*),*
- *výplatní (užitkové) funkce* $U_i; i \in Q$,
- *způsob hraní hry a forma herního ekvilibria,*

a současně tento fakt samotný je common knowledge, pak mají hráči kompletní informaci o hře.

U her v rozšířené formě navíc zavedeme pojem dokonalá (angl. perfect) a nedokonalá (angl. imperfect) informace ve hře. Pojmy common knowledge, complete information a perfect information tak bude vyčerpáno zkoumání informovanosti hráčů o situaci.

1.3 Analýza hry

Chceme nyní zkoumat pohled jednotlivých hráčů na hru. Elementem zkoumání hry je volba strategie v situaci, kdy protihráč volí konkrétní strategii. Dostáváme se tak na úroveň první kapitoly, t.j. na teorii volby.

V situaci, kdy protihráči volí konkrétní strategie s_{-i}, hráč i vždy volí takovou strategii, která mu v této situaci přinese maximální zisk. Je to hráčova nejlepší odpověď (angl. best-response) na danou situaci. Zavedeme si proto formálně pojem best-response.

Definice 5. *Uvažujme hru* $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$*, hráče* $i \in Q$ *a konkrétní sub-profil* $s_{-i} \in S_{-i}$. *Nejlepší odpověď hráče* i *v situaci* s_{-i} *je*

$$BR_i(s_{-i}) = arg \max_{s_i \in S_i} [U_i(s_i, s_{-i})]$$

Vidíme, že $BR_i(s_{-i})$ je maximální množina na množině strategií S_i z pohledu užitků $\{U_i(s_i, s_{-i})\}_{s_i \in S_i}$. Je třeba znovu zdůraznit, že best-response je množina[4]. Formálně jsou tedy definiční obor a obor hodnot BR_i definovány takto:

$$BR_i : S_{-i} \to 2^{S_i} \setminus \{\emptyset\}$$

Racionální hráč vždy hraje strategii, která je best-response v situaci s_{-i}. Tento fakt můžeme brát jako základní stavební kámen následujících úvah. Není proto překvapující, že od ekvilibria ve hře budeme očekávat, že bude vzájemným best-response všech hráčů, tedy formálně:

Definice 6. *Uvažujme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. Profil $s^* \in S$ je tak zvaným rovnovážným stavem hry (ekvilibriem ve hře), pokud platí*

$$\forall i \in Q : s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*)$$

Než se však dostaneme k obvyklejší formě definice ekvilibria a dalším poznatkům, které se ho týkají, můžeme strategickou situaci dále zkoumat bez potřeby okamžitě nalézt body rovnováhy.

1.3.1 Dominance mezi strategiemi ve hře

Je zcela jisté, že pokud má hráč strategii, která mu *vždy přinese horší užitek* než jeho ostatní strategie, nebude takovou strategii ve hře uvažovat. Taková strategie nemá pro hráče smysl. Předpokládáme, že i jeho protihráči si takové strategie všimnou. Celkově tudíž ve hře nebude uvažována. Budeme nyní zkoumat tak zvané dominantní (angl. dominant) a dominované (angl. dominated) strategie[5].

Definice 7. *Uvažujme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. Řekneme, že strategie $s_i^1 \in S_i$ striktně dominuje nad strategií $s_i^2 \in S_i$, pokud platí:*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s_{-i}) > U_i(s_i^2, s_{-i})$$

Situace, kdy jedna strategie (s_i^1) striktně dominuje nad jinou (s_i^2) strategií hráče má pro hru velkou vypovídací hodnotu. Strategie s_i^2 se zde nazývá strategií striktně dominovanou strategií s_i^1. Racionální hráč bude vždy preferovat s_i^1 před s_i^2. Z toho plyne také, že pokud existuje alespon jedna strategie s_i^1, která striktně dominuje nad s_i^2, tak hráč s_i^2 nikdy nebude hrát. Odlišujme ale mezi pojmy "striktně dominantní strategie" a "strategie striktně dominující nad jinou strategií".

[4] Pokud to chce někdo brát opravdu programátorsky, pak je best-response funkce, která má na vstupu sub-profil $s_{-i} \in S_{-i}$ a *vrací* množinu strategií, která je podmnožinou S_i.

[5] Český výraz "dominovaný" možná není z pohledu spisovné češtiny úplně správný. Může být, že správným výrazem by bylo "dominující", tedy strategie x dominuje strategii y. Osobně bych preferoval výraz "dominovaný", tzn. strategie x je dominovaná strategií y.

Všimněme si, že striktní dominance je forma preference hráče nad strategiemi ve hře. Ovšem pouze forma, neboť z principu není tato relace úplná (nelze říct pro každé dvě různé strategie $s_i^1, s_i^2 \in S_i$, že buď s_i^1 striktně dominuje nad s_i^2 nebo naopak).

Definice 8. *Uvažujme hru* $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. *Strategie* $s_i^2 \in S_i$ *hráče* i *je ve hře striktně dominovaná, pokud pro všechny strategie* $s_i^1 \in S_i \setminus \{s_i^2\}$ *platí, že* s_i^1 *striktně dominuje nad* s_i^2.

Racionální hráč nikdy nebude striktně dominovanou strategii hrát. Opakem striktně dominované strategie je strategie striktně dominantní (tj. neexistuje jiná strategie hráče, která by ji striktně dominovala). Pokud hráč má striktně dominantní strategii, bude ji vždy hrát (navíc je z principu jediná) a je zřejmé, že jeho protihráči budou volit best-response na tuto strategii.

Pokud mají všichni hráči striktně dominantní strategii (kterou tedy pochopitelně hrají), výsledek hry se pak nazývá **ekvilibrium striktně dominantních strategií**. Jako příklad takové situace si uvedeme slavné Vězňovo dilema, které je fenoménem teorie her a bohužel i našeho reálného světa.

Pro úplnost zavedeme ještě slabou dominanci mezi strategiemi.

Definice 9. *Uvažujme hru* $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. *Strategie* $s_i^1 \in S_i$ *slabě (weakly) dominuje nad strategií* $s_i^2 \in S_i$, *pokud platí:*

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s_{-i}) \geq U_i(s_i^2, s_{-i})$$

a současně

$$\exists s'_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s'_{-i}) > U_i(s_i^2, s_{-i})$$

Zopakujme si pojmy spojené s dominancí:

- Dominovat – jedna strategie dominuje nad druhou. Je to vztah dvou konkrétních strategií x a y, kdy například x je dominantní nad y a y je dominovaná x.

- Být dominantní (bez uvedení dvojice strategií) – dominantní strategie dominuje nad všemi ostatními strategiemi.

- Být dominovaný (bez uvedení dvojice strategií) – strategie x je dominovaná, pokud všechny ostatní nad ní dominují.

1.4 Vězňovo dilema

Vězňovo dilema (angl. Prisoner's dilemma) poprvé představili pánové Merrill Flood a Melvin Dresher v roce 1950, tehdy pracující pro americkou instituci RAND (tam se také sdružovala většina amerických herních teoretiků). Příběh o vězních později dodal Albert W. Tucker.

Vězňovo dilema je neslavnější strategická situace, která kdy byla v teorii her zkoumána. Ukazuje, že lidé nejsou schopni kooperace, ani pokud jim nekooperace přinese značné ztráty. Toto dilema je modelem mnoha každodenních lidských situací. Vězňovo dilema je pro teorii her natolik významný model, že znalost této strategické situace je nutno považovat za znalost naprosto základní. Různí autoři podávají tuto hru v různých hodnotách užitku, veškeré instance této hry jsou však strategicky ekvivalentní s následujícím modelem.

Představme si, že policie zatkne dva podezřelé – Petera a Johna, a obviní je například z ozbrojené loupeže. Bohužel však policie nemá důkazy o jejich zločinu a proto je uvede do následující situace. Oběma společně oznámí následující pravidla a bezprostředně poté je umístí do oddělených cel tak, že Peter a John spolu nemohou komunikovat. Oznámení je takové:

- Pokud se přiznáš a přizná se i tvůj komplic, půjdete oba na deset let do vězení.
- Pokud se přiznáš (tzn. budeš vypovídat), ale tvůj komplic se nepřizná, pak ty budeš osvobozen (0 let vězení) a tvůj komplic si odsedí za oba dvacet let.
- Pokud budete oba mlčet, máme na vás pouze nezákonné držení zbraně, která se u vás našla a dostanete každý jeden rok vězení.
- Pokud se nepřiznáš a tvůj komplic bude vypovídat, viz. výše symetricky.

Tato situace je rozhodně pro oba komplice dilema. Lze předpokládat ze znalosti běžné praxe, že zločinci se vzájemně kryjí, ovšem tady předpokládáme individuální racionalitu, žádné postranní dohody a tím méně jejich vymahatelnost a obavu z výsledku, kdy se komplic přizná a já ne. Současně předpokládáme u hráčů kompletní informaci o hře, tj. hráči znají oba podmínky hry a současně tento fakt o sobě navzájem ví.

Peter/John	přiznat se	zatloukat
přiznat se	-10,-10	0,-20
zatloukat	-20,0	-1,-1

Figure 1.1: Maticová hra pro Vězňovo dilema

Užitek ve formě let ve vězení vyjadřujeme záporným číslem, aby bylo možno intuitivně porovnávat výstupy a tím definovat preferenci.

Z analýzy hry plyne, že pro Petera je strategie ”přiznat se” striktně dominantní, neboť mu vždy garantuje striktně lepší výsledek než strategie ”zatloukat”. Symetricky je to u Johna. Hra ma tudíž ekvilibrium ve striktně dominantních strategiích, oba podezřelí se přiznají a jdou na deset let do vězení.

Pokud budeme chápat strategii ”přiznat se” jako strategii zradit a strategii ”zatloukat” jako strategii spolupracovat (kooperovat), dostáváme se k modelu mnoha lidských životních situací.

Pokud bysme přepokládali možnost podezřelých si předem dohodnout společnou volbu strategie a následně je zase od sebe odloučili, pak jejich chování stejně sklouzne k ekvilibriu ve striktně dominantních strategii. Prostě obava ze zrady bude silnější než víra v kooperaci. Aby byla kooperace uvěřitelná, musí existovat důvěryhodná hrozba trestu, který bude v případě zrady značně převyšovat nejhorší možný výsledek ve hře (například hrozba ve formě pomsty kumpánů Petera a Johna).

V dalších kapitolách znovu povoláme Vězňovo dilema k dalšímu zkoumání, například v kapitole o opakovaných hrách.

1.5 Rovnovážný stav ve hře (ekvilibrium)

Rovnovážný bod ve hře neboli ekvilibrium je jedním z největších problémů teorie her. Je totiž velmi jednoduše definován, ale přesto je jeho zjištění extremné obtížný algoritmický úkol.

Ekvilibrium v nekooperativních strategických hrách zavedl John Nash v roce 1950 ve svém článku [1]. Do té doby bylo známo pouze ekvilibrium v tak zvaných nekooperativních hrách s nulovým součtem, které zavedl matematik John von Neumann [2] a publikoval ve slavné knize společně s Oskarem Morgensternem – Theory of Games and Economic Behavior. John Nash na jejich práci navázal ve svém postgraduálním studiu, kde zkoumal obecné pojetí nekooperativních her s vazbou na vyjednávání a kooperativní hry.

Ekvilibrium ve hrách je od doby Nashova průlomu v teorii her nazýváno Nashovo ekvilibrium (NE). Nashovo ekvilibrium má specifický význam, neboť popisuje racionální pnutí (incentives) ve všech formách her a jeho význam tak přesahuje teorii nekooperativních her. Přínos Johna Nashe je tak pro teorii her nepopiratelný. Můžeme sice najít v ještě dávnější historii příklady herně-teoretických úvah (Cournotovo řešení oligopolu), můžeme za otce (a matku) teorie her považovat von Neumanna nebo Morgensterna, reálně však teorie her začala existovat právě myšlenkou Johna Nashe.

Předvedeme si nyní formální definici Nashova ekvilibria:

Definice 10. *Uvažujme hru* $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. *Strategický profil* $s^* \in S$ *je ryzím Nashovým ekvilibriem (PNE) ve hře, pokud platí pro všechny hráče* $i \in Q$*:*

$$\forall s_i \in S_i : U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Tato definice je pro teorii her klíčová. Říká, že pokud hráči hrají profil s^*, tak žádný hráč nemůže *zvýšit* svůj užitek přechodem do jiné strategie $s_i \in S_i, s_i \neq s_i^*$, to znamená, že užitek $U_i(s_i, s_{-i}^*)$ může být přinejlepším stejně dobrý jako $U_i(s^*)$. Důležité je však pochopit, že výsledek hráčů v ekvilibriu není jejich maximálním ziskem, ale pouze optimálním nebo také stabilním. Vlastnost rovnováhy vede hráče mnohdy k neefektivním výsledkům hry (jak je zřejmé například u Vězňova dilematu).

Definice 10 zavádí Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích. Budeme se ekvilibrii dále podrobněji zabývat, v tomto okamžiku se však sluší uvést několik zásadních faktů o ekvilibriích (zatím bez nároků na podrobnější pochopení):

- Hra může mít více Nashových ekvilibrií v ryzích strategiích. Můžeme pak zkoumat, které z nich hráči zvolí.
- Existují hry, které nemají žádné Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích.
- Každá konečná hra má alespoň jedno ekvilibrium ve smíšených strategiích (probereme v dalších kapitolách).

1.5.1 Intiutivní algoritmus nalezení PNE

V malých hrách můžeme snadno zjistit ryzí Nashova ekvilibria z definice 10 tak, že si pro každý profil položíme otázku, zda-li pro všechny hráče splňuje definovanou podmínku.

Dále můžeme pro každého hráče $i \in Q$ a každý možný sub-profil $s_{-i} \in S_{-i}$ vyhodnoti hráčovu nejlepší odpověď $BR_i(s_{-i})$ a poznačit si profily, kde $BR_i(s_{-i})$ nastala. Pak z definice 6 vyhodnotíme průnik takových profilů, tedy:

$$BRpne_i = \bigcup_{s_{-i} \in S_{-i}} \{(s_i, s_{-i}) | s_i \in BR_i(s_{-i})\}$$

$$PNE = \bigcap_{i \in Q} BRpne_i$$

U větších her již vychází tyto algoritmy jako neefektivní, specificky pokud hledáme ekvilibria ve smíšených strategií (bude vysvětleno dále). Býva proto vhodné redukovat hru na její strategický ekvivalent s menším počtem strategií hráčů. Vhodná může být následující technika známá jako iterativní eliminace dominovaných strategií.

Co znamená ekvilibrium pro reálný život?

V předmětu THE zavedeme několik tak zvaných zjemnění nebo take zpřesnění ekvilibria (angl. refinements) a také jedno zobecnění ve formě korelovaného ekvilibria. Veškeré zpřesňující refinements ovšem budou stále plnit podmínku Nashe a v případě zobecnění bude platit, že všechna Nashova ekvilibria budou zároveň i korelovaná ekvilibria.

Co přesto znamená ekvilibrium v chápání reálných situací a lze vůbec věřit, že reální hráči pochopí, kde leží ve hře rovnovážný stav?

Předně, ekvilibrium je algoritmický popis nalezení rovnováhy, která hráčům ukazuje optimální výsledek hry. Je to zatím jediný algoritmicky popsaný postup a pokud budeme někdy implementovat simulační modely s prvky hry, impelemtaci ekvilibria se nevyhneme.

Experimentální teorie her ukazuje, že většinou hráči ve zkoumaných situacích jaksi do rovnovážného stavu dokonvergují. Stane se to buď opakovanými hrami, kde hráči mají zpětnou vazbu a intuitivně se do ekvilibria časem dostanou nebo úvahu s opakováním situace jsou schopni provést ve svých hlavách.

1.6 Iterativní eliminace dominovaných strategií

S nedávno zavedeným pojmem dominantní a dominované strategie souvisí následující technika redukce hry na strategicky ekvivalentní hru bez dominovaných strategií, která může vést až k nalezení ekvilibria. Potřebujeme zavést nejdříve pojem strategické ekvivalence her a redukce hry na její strategický ekvivalent.

1.6.1 Strategická ekvivalence her

Na strategickou ekvivalenci dvou her je možno pohlížet z mnoha úhlů a zavádět rozličné definice. Strategickou ekvivalenci dvou her Γ a Γ' můžeme intuitivně chápat jako stav, kdy v obou hrách hráči vykazují stejné chování. Viděno přes PNE, hry mohou být nazvány strategicky ekvivalentními, pokud mají stejná PNE.

Nejdříve pochopíme následující fakt:

Definice 11. *Hra* $\Gamma = (Q, \{S_i\}_{i\in Q}, \{U_i\}_{i\in Q})$ *je ekvivalentní s hrou* $\Gamma' = (Q, \{S_i\}_{i\in Q}, \{U'_i\}_{i\in Q})$, *pokud existují pro každého hráče* $i \in Q$ *reálná čísla* A_i, B_i, *kde* $A_i > 0$ *a platí* $\forall s \in S$:

$$U'_i(s) = A_i U_i(s) + B_i$$

Definice říká, že pokud jsou užitkové funkce U'_i lineárními kombinacemi funkcí U_i, pak jsou hry ekvivalentní. Pokud tedy ke všem ziskům jednoho hráče přičteme konkrétní jedno číslo, strategický charakter jeho chování se nezmění.

Pokud odebereme ze hry nějakou strategii, vytváříme tak podhru hry (pozor, v sekvenčních hrách bude podhra, angl. sub-game, označuje jiný problém).

1.6.2 Algoritmus eliminace

Algoritmus iterativní eliminace dominovaných strategií pracuje v krocích, kdy v každém kroku ze hry eliminuje striktně dominované strategie hráčů. Po eliminaci docházíme k redukované hře, kde ovšem strategie, které byly ponechány, nyní se nově mohou stát striktně dominovanými. Iterativní proces končí se hrou, která už neobsahuje u žádného hráče striktně dominovanou strategii.

Poznamenejme, že tento algoritmus je možno uplatnit i s použitím slabé dominance. Mohou tak ovšem ze hry vypadnout strategie, které by tvořily Nashova ekvilibria.

1.7 Efektivita profilu a Pareto dominance

V teorii volby jsme zkoumali preference nad akcemi hráče, ve hrách jsme zavedli preference z hlediska dominance strategií a nyní probereme preference nad strategickými profily.

Efektivita profilu je forma statistiky vypovídající o celkovém dosaženém užitku při hraní profilu. Zjednodušeně efektivitu profilu definujme jako

$$E(s) = \sum_{i \in Q} U_i(s)$$

Je pochopitelné, že pokud hráči posuzují dva profily $s, s' \in S$ a $E(s) > E(s')$, tak je velká šance, že dají přednost profilu s (například pokud jsou s, s' PNE ve hře). Tento pohled ovšem negarantuje celkovou spokojenost všech hráčů s efektivnějším profilem.

Vilfredo Pareto (1848–1923), italský slavny ekonom, zavedl pojem Pareto dominance, který si nyní definujme:

Definice 12. *Uvažujme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. Profil $s \in S$ pareto dominuje nad profilem $s' \in S$, pokud platí, že*

$$\forall i \in Q : U_i(s) \geq U_i(s')$$

a současně

$$\exists i \in Q : U_i(s) > U_i(s')$$

Všimněme si, že definice pareto dominance je totožná s definicí slabé dominance nad strategiemi jednoho hráče. Pokud tedy všichni hráči v dominantním profilu získávají alespoň stejně hodně jako v dominovaném, tak nejspíš ti striktně lepší hráči budou dominantní profil preferovat a ostatní hráči budou spolupracovat (například proto, že očekávají striktně lepší hráče hrát dominantní profil a přizpůsobí svou best-response).

Na pojem dominance (tzn. jisté formy preference) navazuje pojem konečné efektivity, tedy forma maximální množiny a tedy i optima:

Definice 13. *Uvažujme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. Profil $s \in S$ je pareto efektivní, pokud neexistuje jiný profil $s' \in S$ takový, že by s' pareto dominoval nad s.*

Pochopitelně nezkoumáme pareto dominanci nad všemi profily, ale obvykle nad profily, které tvoří PNE.

Na závěr této kapitoly poznamenejme, že v reálných situacích mohou vznikat různé dohody mezi hráči, které způsobí, že hráči souhlasí s pro ně horším profilem, pokud se dohodnou na jiném přerozdělení zisku (vede to na kooperativní hry s přenositelným užitkem, viz dále).

Chapter 2

Cournotův model oligopolu

Matematické řešení oligopolních trhů byl historicky první pokus odvodit matematicky chování hráčů ve strategické situaci. Mírně zde zabrousíme do mikroekonomických teorií, ale na úrovni, která nevyžaduje hlubší znalosti ekonomie[1].

Pro začátek prostudujeme situaci na trhu s jedním konkrétním druhem výrobku (komoditou), kde předpokládáme, že výrobek může pocházet od různých výrobců, ale pro zákazníka jsou všechny kvalitativně shodné a rozlišují produkci různých výrobců pouze cenou výrobku (homogenní produkt). Můžeme mluvit například o standardizovaném rohlíku – ten všichni znají a zkoumají pouze jeho cenu.

Předpokládejme, že cena výrobku vznikne působením tržních sil na trhu vlivem zákonů nabídky a poptávky, které popíšeme rovnicí:

$$p = M - q$$

kde p značí maximální dosažitelnou cenu, q je množství dodané na trh a M je specifická konstantna daná trhem.

Bude nás zajímat cena výrobku na trhu a množství, které jsou za těchto okolností výrobci ochotni dodat na trh. Budeme zkoumat situaci danou jedním výrobcem s monopolním postavením, situací se dvěma výrobci (duopol) a situací s více výrobci (oligopol). Oligopol sám je definován jako situace na trhu s komoditou, kterou dodává dva a více hráčů, kdy každý je svou tržní/výrobní silou schopen ovlivnit cenu komodity na trhu. Duopol je tedy specifický případ oligopolu, ale my budeme odlišovat situaci dvou hráčů a situaci obecně více (tři a více) hráčů[2].

Monopolista na trhu bude maximalizovat svůj zisk, tedy hledat extrém funkce:

$$u(q) = p \cdot q - c \cdot q = Mq - q^2 - cq$$

kde c bude v následujícím textu vždy vyjadřovat výrobní náklady spojené s produkcí jednotky

[1]Kapitola vychází z přednášek Magdalény Hykšové z FD ČVUT

[2]Obecně v teorii her jsou dramaticky odlišné modely dvou hráčů a modely s více hráči, zejména z pohledu jejich složitosti. Vícehráčovou hrou se vždy rozumí hra tří a více hráčů.

komodity (cena výroby jednoho rohlíku). Funkce vyjadřuje rozdíl tržeb a výrobních nákladů, což je pro nás nyní zisk výrobce z prodeje.

Hledáme extrém užitkové funkce (bod, ve kterém je první derivace nulová):

$$u'(q) = M - 2q - c = 0 \Rightarrow q^*_{mon} = \frac{1}{2}(M - c)$$

Maximálního zisku dosáhne monopolista při výrobě q^*_{mon} množství komodity, cena bude

$$p^*_{mon} = M - q^*_{mon} = M - \frac{1}{2}(M - c) = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(M + c)$$

Zisk je konečně dán vztahem

$$u^*_{mon} = u(q^*_{mon}) = q^*_{mon}(p^*_{mon} - c) = \left[\frac{1}{2}(M - c)\right]^2$$

Pokud přidáme dalšího výrobce (hráče), očekáváme pak, že se cena výrobku sníží a množství dodané na trh se zvýší. V oligopolní situaci, kdy se počet hráčů limitně blíží k nekonečnu, uvidíme, že hráči produkují s nulovým ziskem.

Následující model sestavil Augustine Cournot a je znám jako Cournotův model duopolu/oligopolu. Pro herní teoretiky je zajímavé zjištění, že Cournot odvodil Nashovo ekvilibrium jako průsečík tak zvaných reakčních křivek hráčů – což jsou pro nás best-response křivky. Z pohledu her je Cournotův model oligopolu strategická nekooperativní hra s nekonečně mnoha strategiemi, resp. se strategiemi tvořenými spojitými (omezenými nebo neomezenými) intervaly – tady předpokládáme, že množiny strategií hráčů jsou $S_i = (0, \infty)$.

2.1 Cournotovo řešení duopolu

Mějme tedy dva hráči-výrobce, což znamená, že hledáme q_1, q_2 při výrobních nákladech c. Maximální dosažitelná cena komodity na trhu je podobně dána rovnicí dávající do vztahu cenu a dodané množství:

$$p = M - q_1 - q_2$$

Hráči nejspíš volí množství (svou množstevní strategii) z intervalu $\langle 0, M \rangle$, to znamená, že jejich množstevní strategie jsou nekonečné ohraničené množiny:

$$S_1 = S_2 = \langle 0, M \rangle$$

Výplatní funkce již nyní závisí na hraném profilu (máme tady hru):

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c)q_1 = (M - q_1 - q_2 - c)q_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = (p - c)q_2 = (M - q_1 - q_2 - c)q_2$$

Zkoumejme pohled prvního duopolisty. Pohled druhého duopolisty je totiž obdobný. Pro každou strategii soupeře q_2 hledá takové množství $q_1 = R_1(q_2)$, aby hodnota $u_1(q_1, q_2)$ byla maximální (je to jeho best-response). Funkci $R_1(q_2)$ říkáme *reakční křivka*. Matematicky vzato (lépe řečeno, z matematické analýzy) hledáme extrém funkce více proměnných podle proměnné q_1, což vede na parciální derivaci (ostatní množstevní proměnné zde vystupují jako konstanty):

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = M - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

Hráč bude hrát takovou strategii q_1, aby byla best-response na protihráčovu q_2, to znamená hledá bod extrému, který nastává v bodě q_1 takovém, že

$$M - c - q_2 - 2q_1 = 0$$

Strategie q_2 je pro rozhodování prvního hráče sub-profilem (tzn. s_{-i}), tedy konstantou a hráč jedna hledá svou best-response mezi svými S_1. Proto klademe rovnost:

$$q_1 = R_1(q_2) = \frac{1}{2}(M - c - q_2) \tag{2.1}$$

Analogicky druhý hráč volí:

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{1}{2}(M - c - q_1)$$

Kde je rovnovážný bod (q_1^*, q_2^*)? Cournot jej navrhl jako průsečík reakčních křivek, tedy v herně teoretickém pojetí jako vzájemnou best-response hráčů.

Hledáme (q_1^*, q_2^*) tak, že $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$:

$$q_2^* = \frac{1}{2}\left(M - c - R_1(q_1^*)\right)$$

což je

$$q_2^* = \frac{1}{2}\left(M - c - \frac{1}{2}\left(M - c - q_2^*\right)\right)$$

a po zjednodušení dostáváme vztah pro q_2^*:

$$q_2^* = \frac{1}{3}(M - c) \tag{2.2}$$

Po dosazení (2.2) do (2.1) získáme:

$$q_1^* = \frac{1}{3}(M - c)$$

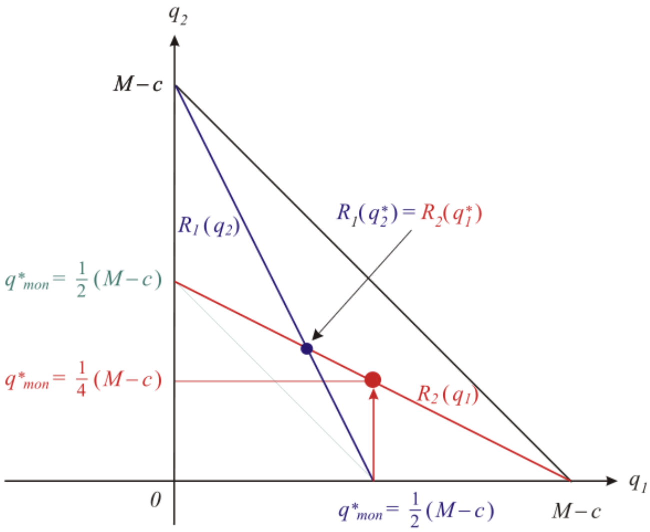

Figure 2.1: Cournotovo řešení oligopolu – grafické vyjádření průsečíků reakčních křivek [použito z přednášek M. Hykšové]

Cena dosažená na trhu vychází z původní rovnice mezi cenou a množstvím na trhu:

$$p_D^* = M - q = M - q_1^* - q_2^* = M - \frac{2}{3}(M-c) = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$$

Zisk pro každého je

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \left[\frac{1}{3}(M-c)\right]^2$$

A celkový zisk hráců v situaci je menší než zisk monopolisty:

$$u_1(q_1^*, q_2^*) + u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{2}{9}\left[(M-c)\right]^2$$

Vyrobeno a dodáno na trh je celkově, což je více než u monopolisty:

$$q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(M-c)$$

Celkově je vidět, že duopolní situace je pro zákazníky lepší než monopolní, neboť duopolisté prodávají větší množství výrobků za nižší cenu než monopolista. Lze tedy i očekávat, že s každým dalším výrobcem se situace na trhu z pohledu zákazníka zlepší.

Úvaha s různými výrobními náklady $c_1 \neq c_2$ hráčů

Pokud očekáváme, že výrobní náklady hráčů jsou rozdílné, pak docházíme k následujícímu ekvilibriu:

$$q_1^* = \frac{1}{3}(M + c_2 - 2c_1)$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}(M + c_1 - 2c_2)$$

Uplatní se tedy více hráč s nižšími náklady, což není nijak překvapivé.

Úvaha o tajné dohodě duopolistů

Mohou se duopolisti dohodnout a vyrábět pouze q^*_{mon} jako monopolista?

Dostáváme se tak mimo rovnovážný bod. V takovém bodě je situace nestabilní, protože každý z hráčů může vybočit z profilu a krátkodobě si zisk navýšit. Pokud připouštíme kooperativnost (např. formou vyjednávání), pak studujeme rozsáhlejší oblast řešení. Více v přednášce o kooperativních hrách.

2.2 Řešení oligopolů

Uvažujme n hráčů, kde každý hledá svoji strategii q_i. Zisky jsou opět dány pro hráče $i \in Q$ symetricky:

$$u_i(q_1, q_2, ..., q_n) = (p - c)q_i = (M - c - q_1 - q_2 - ... - q_n)q_i$$

Rovnovážný bod získáme mírně komplikovanějším odvozováním než u duopolu, ale postup je v principu shodný:

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} = M - c - q_1 - q_2 - ... - 2q_i - ... - q_n = 0$$

Z obecného předpisu obdržíme soustavu rovnic a tu řešíme analyticky:

$$\begin{array}{ccccccccc}
2q_1 & + & q_2 & + & ... & + & q_n & = & M - c \\
q_1 & + & 2q_2 & + & ... & + & q_n & = & M - c \\
.. & & & & & & & & \\
q_1 & + & q_2 & + & ... & + & 2q_n & = & M - c
\end{array}$$

Řešením soustavy obdržíme

$$q_1^* = q_2^* = ... = q_n^* = \frac{M - c}{n + 1}$$

Oligopolisté dohromady vyrobí:

$$q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^* = n\frac{M-c}{n+1} = \frac{n}{n+1}(M-c)$$

Z toho je patrné, že s rostoucím počtem hráčů roste i množství dodaného produktu a klesá jeho cena (a zisk firem).

$$p^* = \frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$$

$$u^* = \frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$$

Když jde n k nekonečnu, dostáváme se do situace, která se nazývá *dokonalá soutěž (konkurence)*, kdy na trhu soupeří velké množství srovnatelných firem, kde žádná z nich nemá moc významně ovlivnit množství na trhu.

Velmi zajímavé je zjištění, že dodané množství na trh je v situaci dokonalé konkurence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}(M-c) = M-c$$

což souvisí i s cenou požadovanou za výrobek (nemůžeme očekávat, že by klesla pod náklady výroby):

$$p^* = M - (M-c) = c$$

Celkový zisk oligopolistů v dokonalé konkurenci:

$$u^* = 0$$

Pro srovnání situací monopolu, duopolu, oligopolu a oligopolu v dokonalé konkurenci uveďme přehledovou tabulku na Obrázku 2.2.

	Celkové množství q^*	Cena za jednotku p^*	Celkový zisk u^*
Monopol	$\frac{1}{2}(M-c)$	$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M-c)^2$
Duopol	$\frac{2}{3}(M-c)$	$\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(M-c)^2$
Oligopol	$\frac{n}{n+1}(M-c)$	$\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(M-c)^2$
Dok. soutěž	$(M-c)$	c	0

Figure 2.2: Srovnání různých tržních situací

2.3 Bertrandův model oligopolu (1883)

Je zjevné, že oligopol nevede v realitě ani náznakem k dokonalé konkurenci, která se vyznačuje cenou na úrovni výrobních nákladů a nulovým provozním ziskem. Můžeme to zkoumat na komoditách každodenní spotřeby, kde lze jednoduše měnit dodavatele a produkt je víceméně srovnatelný. Nejvíc typické je to u telefonních nebo bankovních služeb.

Bertrandův model oligopolu není z pohledu teorie her tak přelomový, jako byl ten Cournotův. Bertrand revidoval závěr Cournota s tvrzením, že již u duopolistů se může rozběhnout dokonalá konkurence, neboť jejich množstevní ekvilibrium nemusí být stabilní.

Připusťme, že duopolisté hrají $(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{3}(M - c)$ za shodnou cenu $p^* = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$. Při této ceně tvoří nenulový zisk z výroby a prodeje. Při stejné ceně mají rovný množstevní podíl na prodeji.

Najednou jeden z hráčů změní svou cenu $p_i^* := p^* - \Delta$, kde Δ je libovolně malé. Podle logiky trhu by měl hráč i vyprodat veškerou svou produkci a po něm až dražší hráč. Plyne z toho, že hráči nesoutěží množstvím, ale cenou, která může jít až na úroveň nákladů, tedy implikující nulový zisk. Z faktu, že to tak v realitě není, plyne tzv. Bertrandův paradox

Dnešní ekonomie již zná pojem *cenová válka*, který je z pohledu strategické interakce triviální. Představme si například tři hráče $Q = \{A, B, C\}$ na trhu s homogenním produktem, jehož cena se ustálila na $p_i = p^0$ a podíl výrobců q_i na trhu je rovnoměrně rozložen na třetiny, tzn. $q_i = \frac{1}{3}(M - p^0)$.

Pokud se výrobce $j \in Q$ rozhodne uhnout z cenového ekvilibria, pak by podle logiky trhu měl na sebe přetáhnout veškerou poptávku trhu až do výše svých výrobních kapacit a může tak zvýšit svůj zisk. Ostatní výrobci jsou nuceni snížit svou cenu tak, aby se vyrovnali aktuální ceně hráče j, případně jít ještě níže. Rozložení poptávky mezi výrobce se tak zřejmě opět srovná a výsledkem je stejné rozložení výroby s tím významným rozdílem, že už s menšími tržbami. *Proto nelze nikdy očekávat, že si budou hráči konkurovat cenou.* Budou zákazníkům stále dokazovat, že jejich produkt je lepší než konkurenční (bonusy, věrnostní programy, ...), ale nikdy nesníží cenu. K cenové válce může dojít pouze při vstoupení nového hráče na trh, ovšem na dobu velmi krátkou. Navíc by nemělo nikoho překvapit, když je nově příchozí pouze virtuální identitou již zavedeného hráče, která pouze zvyšuje dojem konkurence na trhu.

2.4 Závěr kapitoly o Cournotově modelu oligopolu

Studium Cournotova modelu je pro nás důležité ze tří hlavních důvodů:

1. Cournotův model oligopolu je historicky první ukázka řešení strategické rovnováhy v nekooperativních hrách. Znalost Cournotova modelu je pro teorii her chápána jako znalost základní.

2. Corunotův model je ukázka analytického herně-teoretického modelu. Další modely (např. ekonomické) jsou koncipovány podobným způsobem.

3. Cournotův model je hrán v nekonečných množinách strategií (resp. nekonečných ohraničených množinách) a je to pro nás myšlenkový přechod od ryzích strategií směrem ke smíšeným strategiím.

Na Cournotův model navážeme v kapitole o hrách v rozšířené formě modelem podle Stackelberga, který odlišuje mezi výrobci cenového vůdce a jeho následovníky.

Chapter 3

Hry bez Nashova ekvilibria v ryzích strategiích

Zavedli jsme koncept Nashova ekvilibria v ryzích strategiích (PNE) a nyní je potřeba zkoumat, zda-li každá (avšak konečná) hra má PNE nebo ne. Tento problém rozhodneme nalezením alespoň jedné hry, která PNE nemá. Jako ukázkový model poslouží klasická hra Matching Pennies na Obrázku 3.1 (u nás známe její mírně složitější variantu Kámen-nůžky-papír).

A/B	heads	tails
heads	1,-1	-1,1
tails	-1,1	1,-1

Figure 3.1: Matice zisků ve hře Matching Pennies

Z matice zisků je evidentní, že hra nemá PNE. Znamená to však, že nemá řešení? Pokud by neměla řešení, pak by ji hráči nedokázali hrát a to je nesmysl. Ukážeme, že racionální strategií hráče je hrát v této hře strategii "heads" s pravděpodobností 50 % a podobně strategii "tails".

Pokud zde budeme mluvit o pravděpodobnostech, tak tím nemíníme žádnou nejistotu hráče při rozhodování, jako je tomu u rozhodování za nejistoty (ve hrách proti přírodě), nebo-li u rozhodování nad loteriemi. Pravděpodobnosti budou modelovat indiferenci hráče nad některými jeho strategiemi.

Vyjedeme z potřeby hráče se rozhodnout v situaci dané následující užitkovou funkcí:

volba	a	b	c	d
zisk	10	20	30	40

Je zde zjevné, že hráč dosahuje svého maxima při volbě strategie d. Jakou strategii ovšem hráč zvolí v následující, mírně modifikované situaci:

volba	a	b	c	d
zisk	10	20	40	40

Vidíme, že hráč dostane shodný výsledek při volbě strategie c i d. Hráč je tedy indiferentní mezi c a d. Je mu tedy jedno, zda-li zvolí c nebo d. Racionální hráč tento fakt pochopí[1] a najde si zařízení, které mu vygeneruje náhodnou veličinu v potřebné pravděpodobnostní distribucí. V našem případě si jedinec po staru "hodí korunou". Při zobecnění distribuce náhodné veličiny je modelem jeho rozhodovací situace pravděpodobnostní distribuce $(0, 0, 0.5, 0.5)$.

Nyní si položme tuto otázku: je distribuce $(0, 0, 0.4, 0.6)$ projevem indiference mezi c a d? Jak tuto situaci interpretujeme? Jak by mohla vzniknout? Pokud tím jedinec dává najevo, že je v zásadě indiferentní mezi strategiemi s nenulovou přiřazenou pravděpodobností, ale tak nějak se mu d líbí o kousek víc, pak tímto způsobem rozhodování nemodelujeme. Pochopme, že postoj $d \succ c \succeq d$ je logicky nekonzistentní.

Ve hrách ovšem bude postoj $(0, 0, 0.4, 0.6)$ přípustný, neboť bude vyjadřovat naše očekávání zisku. Očekávaný zisk bude závislý na podobně pravděpodobnostním postoji protihráčů. Náš hráč bude indiferentní nad strategiemi, kterým přiřazuje nenulovou pravděpodobnost, protože očekávané zisky při jejich hraní budou totožné.

3.1 Smíšené rozšíření nekooperativní hry

Navážeme na definici nekooperativní hry hrané v diskrétních množinách strategií (konečná hra). Zavedeme tak zvané smíšené rozšíření hry.

Definice 14. *Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Hru $\Gamma^m = (Q; \{\Delta_i\}_{i \in Q}; \{\pi_i\}_{i \in Q})$ nazveme smíšeným rozšířením hry Γ, pokud $\forall i \in Q$:*

- *Δ_i je množina smíšených strategií hráče i (vektory délky $|S_i|$) s prvky $\sigma_i \in \Delta_i$. Číslo $\sigma_i(s_i)$ označuje pravděpodobnost přiřazenou ryzí strategii $s_i \in S_i$ ve strategii σ_i. Celkově $\Delta = \prod_i \Delta_i$.*

$$\Delta_i = \left\{ \sigma_i \in \langle 0, 1 \rangle^{m_i} \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}; m_i = |S_i|$$

- *Výplatní funkce hráče i (tzv. očekávaný užitek hráče) je v každém smíšeném profilu $\sigma \in \Delta$:*

$$\pi_i(\sigma) = \sum_{s \in S} U_i(s) \cdot \left(\prod_{i \in Q} \sigma_i(s_i) \right)$$

Řešením smíšeného rozšíření hry je smíšené ekvilibrium. Dohodněme se, že nebudeme striktně psát ryzí ekvilibrium v konečné hře a smíšené ekvilibrium ve smíšeném rozšíření konečné hry –

[1] Tento moment může být pro jedince velmi obtížný. Vzpomeňme na bajku o oslovi, který chcípl hlady, neboť se nedokázal rozhodnout mezi levou a pravou otýpkou sena.

budeme rozumět existenci smíšeného rozšíření jaksi implicitně a dále budeme mluvit o hrách s řešením v ryzích strategiích nebo ve smíšených strategiích.

Nashovo ekvilibrium ve smíšených strategiích bude mít fakticky stejnou definici jako pro PNE, ovšem se zavedením očekávaného zisku (pouze zobecnění).

Definice 15. *Mějme hru* $\Gamma^m = (Q; \{\Delta_i\}_{i \in Q}; \{\pi_i\}_{i \in Q})$. *Smíšený profil* $\sigma^* \in \Delta$ *nazveme smíšené Nashovo ekvilibrium ve hře* Γ^m*, pokud platí pro všechny hráče* $i \in Q$ *a všechny možné smíšené strategie* $\sigma_i \in \Delta_i$*:*

$$\pi_i(\sigma^*) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i})$$

Dále nebudeme zdůrazňovat, že smíšené ekvilibrium je definováno v Γ^m, ale implicitně ho budeme chápat jako možné řešení Γ.

Doplníme si ještě pojem *smíšená doména množiny strategií hráče* (snad vhodný překlad anglického pojmu *support*). S tím si zavedeme i notaci $\sigma_i(s_i)$ vyjadřující pravděpodobnost, kterou přiřazuje smíšená strategie σ_i hráče i jeho ryzí strategii $s_i \in S_i$.

Definice 16. *Mějme hru* $\Gamma^m = (Q; \{\Delta_i\}_{i \in Q}; \{\pi_i\}_{i \in Q})$ *a smíšenou strategii* σ_i *hráče* i. *Smíšenou doménou množiny strategií hráče* i *(zkráceně doménou strategií) nazveme podmnožinu strategií*

$$supp_i(\sigma_i) = \{s_i \in S_i | \sigma_i(s_i) > 0\}$$

3.2 Smysl a interpretace smíšených strategií

Uvažujme následující hru:

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

Než si ukážeme postup výpočtu smíšeného Nashova ekvilibria (MNE), ukážeme si, jaká pozorování mají v bodě MNE oba hráči. Mějme následující smíšený profil:

$$\sigma^* = (\sigma^*_1, \sigma^*_2) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right)$$

Jaké jsou ryzí $BR_1(\sigma^*_{-1})$? Jestliže sloupcový hráč hraje ryzí strategii a s pravděpodobností $\frac{1}{5}$ a strategii b s pravděpodobností $\frac{4}{5}$, pak řádkový hráč muže očekávat zisk při hraní c následující:

$$\pi_1(c, \sigma^*_2) = 3 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

Pokud by hrál ryze d, pak:

$$\pi_1(d, \sigma_2^*) = -1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

Toto je první důležitá vlastnost smíšeného Nashova ekvilibria:

> *Pokud hráči hrají smíšené Nashovo ekvilibrium σ^*, pak je každý hráč i indiferentní ve svém očekávání mezi všemi svými ryzími strategiemi, kterým jeho smíšená strategie σ_i^* přiřazuje nenulovou pravděpodobnost.*

Toto pochopitelně v MNE platí vzájemně. Co přesně ovšem značí ta pravděpodobnostní distribuce? Pokud trváme na tom, aby se řádkový hráč v naší hře rozhodl a zvolil nějaký konkrétní ryzí tah, pak se hráč hrající σ_1^* s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ rozhodne pro c a s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ rozhodne pro d.

Pojd̆me ovšem dále. Někdo může namítnout, že pro sloupcového hráče je pravděpodobnější hrát b, a proto bude hrát b vždy. Pokud by sloupcový hrál smíšeně $(0, 1)$, tedy strategii b s pravděpodbností 1, pak je jeho očekávaný zisk: $\frac{3}{4}3 + \frac{1}{4}1 = 2.5$ (je horší než $\pi_2(\sigma^*)$).

Pokud by řádkový hráč získal dojem, že sloupcový bude hrát $(0, 1)$, pak je jeho BR hrát $(0, 1)$, což můžeme snadno na matici hry ověřit. Na to ovšem zareaguje sloupcový přesunutím se do levého sloupce, kde je strategie a. Pokud tedy hráči nepřistupují k rovnováze smíšeně, hra hraná v ryzích strategiích nenajde rovnovážný bod.

Stability to dosáhne až v σ^*, kdy jsou oba hráči indiferentní mezi $\{a, b\}$, resp. $\{c, d\}$ a je pravděpodobné, že sloupcový zvolí b a řádkový c, kde dosáhnou užitku $(1, 3)$ (místo $(1.4, 2.7)$).

Poznamenejme na závěr, že toto je pouze demonstrační příklad. Neplatí tedy obecně, že hráči ve smíšeném ekvilibriu přiřazují všem svým ryzím strategiím nenulovou pravděpodobnost.

3.3 Výpočet smíšené rovnováhy – hledání průsečíku reakčních křivek

Mějme následující hru:

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

Písmenem p budeme značit pravděpodobnost hraní strategie a řádkového hráče, tzn. že $1 - p$ určuje pravděpodobnost hraní b. Podobně s písmenem q pro sloupcového hráče.

Funkce π_i je funkce v proměnných p a q. Hledáním jejího extrému podle p, tzn. $\frac{\partial \pi_1}{\partial p}$ získáváme náhled na nejlepší odpověd̆ řádkového hráče v sub-profilu $(q, 1 - q)$ hraní protihráče.

$$\pi_1 = 3pq + 1p(1-q) - 1(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 5pq - p - 3q + 2$$

Funkce π_1 udává očekávaný zisk řádkového hráče v závislosti na hraní jeho a protivníkovy smíšené strategie. Položíme první derivaci funkce rovnou nule a získáváme bod, ve kterém funkce dosahuje extrému (zřejmě maxima, což můžeme ověřit na druhé derivaci):

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p} = 5q - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5}$$

Funkce π_1 dosahuje extrému v bodech (p, q) takových, že $q = \frac{1}{5}$. Podobně u funkce π_2:

$$\pi_2 = 2pq + 3p(1-q) + 4(1-p)q + (1-p)(1-q) = -4pq + 2p + 3q + 1$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q} = -4p + 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

Smíšené Nashovo ekvilibrium tedy nastává ve smíšeném profilu

$$\sigma^* = ((p, 1-p), (q, 1-q)) = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)$$

3.4 Výpočet smíšené rovnováhy – obecný algoritmus

Mějme stejnou hru jako v posledním příkladu. Vycházíme z poznání indiference mezi a a b při hraní smíšené $(p, 1-p)$ versus smíšené $(q, 1-q)$. Budeme tedy *předpokládat* u hráčů domény (supports) $supp_1 = \{c, d\}$ a $supp_2 = \{a, b\}$.

Z předpokladu indiference řádkového hráče mezi všemi jeho ryzími strategiemi z domény pak pro řádkového hráče vychází užitek:

$$U_1(c, a) \cdot q + U_1(c, b) \cdot (1-q) = U_1(d, a) \cdot q + U_1(d, b) \cdot (1-q)$$

$$3q + 1(1-q) = -1q + 2(1-q)$$

$$3q = -q + (1-q)$$

$$q = \frac{1}{5}$$

Podobně sloupcový: $2p + 4(1-p) = 3p + (1-p) \Rightarrow p = \frac{3}{4}$

Tento postup je základem algoritmu hledání smíšených ekvilibrií silou. V tomto algoritmu zkoumáme všechny možné domény jednoho hráče proti všem možným doménám druhého hráče. Pro každou iteraci získáváme soustavu rovnic, které jsou v případě dvouhráčových her lineární a v případě více-hráčových her nelineární. Tento algoritmus i určuje časovou složitost výpočtu smíšeného Nashova ekvilibria, která je obecně exponenciální[2].

Výše zmíněný algoritmus[3] pracuje správně pouze u nedegenerovaných her, které si v zápětí definujeme:

Definice 17. *Dvouhráčová hra je tak zvaně nedegenerovaná, pokud žádná smíšená strategie s doménou (support) velikosti k nemá u protihráče více než k ryzích best-response.*

Tuto vlastnost snadno poznáme – pokud má hra na ryzí strategii jednoho hráče dvě (a více) ryzích best-response protihráče, je degenerovaná. Plyne z toho, že kterékoliv Nash ekvilibrium (s_1^*, s_2^*) nedegenerované dvouhráčové hry má domény stejné délky.

3.5 Věta o existenci smíšeného Nashova ekvilibria

Věta 1 (Věta o existenci MNE v konečných hrách)**.** *Každá konečná hra má vždy alespoň jedno řešení ve smíšených strategiích.*

John Nash (1950)

Tato věta je nejvýznamnějším výsledkem Johna Nashe a základem studia nekooperativních herních situací. Důkaz této věty bude proveden v následujících kapitolách.

Věta 2. *Každá konečná nedegenerovaná hra má vždy lichý počet ekvilibrií (tzn. PNE+MNE).*

Důsledek: pokud najdu ve hře pouze 1 PNE, je pouze 1 ekvilibrium. Pokud najdu 2 PNE, pak existuje *třetí* ekvilibrium, které je MNE (a bude nad těmi PNE ukazovat jejich váhu).

[2]Christos Papadimitriou dokázal, že je ve složitostní třídě PPAD

[3]Pro další studium doporučuji: Nisan et al.: Algorithmic Game Theory (link na stránce THE), specificky kapitolu: *Bernhard von Stengel: Equilibrium Computation for Two-Player Games in Strategic and Extensive Form*

Chapter 4

Problém existence ekvilibria ve hrách s nenulovým součtem

Když Nash definoval své ekvilibrium v nekooperativních hrách s nenulovým součtem, bylo nutno navíc ukázat, zda-li jeho koncept platí ve všech myslitelných hrách.

4.1 Kompaktní a konvexní množina

Definice 18. *Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní, pokud je ohraničená (existuje číslo b takové, že $\forall a \in A : ||a|| < b$) a uzavřená (její doplněk $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená množina).*

Definice 19. *Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, pokud pro každé dva její prvky $x, y \in A$ a každé reálné číslo $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$$

Tzn., každý bod na úsečce mezi body x a y patří do množiny A, což je domonstrováno na obrázku 4.1.

4.2 Ryze kvazi-konkávní funkce

Definice 20. *Funkce $f(x) : A \to \mathbb{R}^1$ (kde A je konvexní množina) je ryze kvazi-konkávní, jestliže $f(\lambda x + (1 - \lambda) y) > t$ pro všechna $x, y \in A, x \neq y$, $\lambda \in (0, 1)$ a jakékoliv $t \in \mathbb{R}^1$ takové, že $f(x) \geq t$ a $f(y) \geq t$.*

Definice říká, že funkce (např. užitková funkce, resp. preferenční) nemůže na intervalu (x, y) takovém, že pro oba ohraničující body je $f(\cdot)$ slabě lepší než hodnota t, tvrdit, že připouští bod $z \in (x, y)$, který by nebyl striktně lepší než t nebo dokonce horší.

Naopak, všechny body $z \in (x, y)$ musí být striktně lepší (striktně preferovány nad) než t.

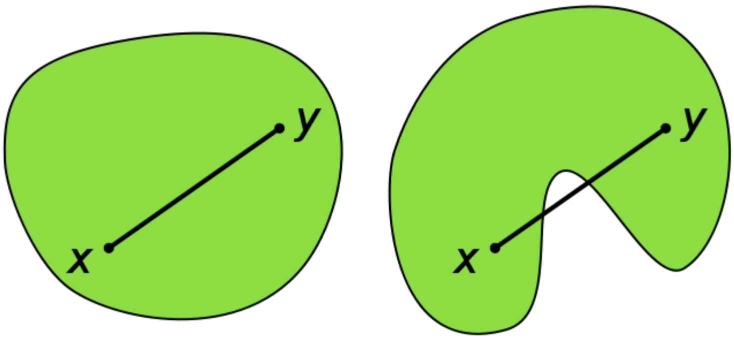

Figure 4.1: Ukázka konvexní a nekonvexní množiny

4.3 Existence Nashova ekvilibria ve hrách se spojitými S_i

Věta 3. *Nashovo ekvilibrium hry v normální formě $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$ existuje, pokud jsou splněny následující podmínky:*

1. *$S_i, \forall i \in Q$ je konvexní a kompaktní podmnožina Euklidovského prostoru.*
2. *$U_i(s_i, s_{-i}) : S \to \mathbb{R}^1$ jsou spojité funkce u všech hráčů $i \in Q$.*
3. *pro všechny hráče $i \in Q$ a všechny $s_{-i} \in S_{-i}$ je funkce $U_i(s_i, s_{-i})$ ryze kvazi-konkávní na množině S_i.*

Důkaz této věty příliš nepotřebujeme. Věta v podstatě stanovuje podmínky, které jsou demonstrovány v Cournotově modulu duopolu, tzn. množiny strategií jsou spojité množiny (konvexní a kompaktní), užitkové funkce jsou spojité a kvazi-konkávní.

4.4 Smíšená best-response hráče ve smíšeném profilu

Připomeňme definici smíšeného Nashova ekvilibria (MNE):

Definice 21. *Smíšený profil $\sigma^* \in \Delta$ je ekvilibrium ve hře Γ^m, pokud platí pro všechny $i \in Q$:*

$$\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$$

$$BR_i(\sigma_{-i}) = arg \left[\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

Předpokládáme, že výsledkem operace $BR_i(\sigma_{-i})$ je podmnožina Δ_i. Množina Δ_i má jiný charakter než S_i! V diskrétních (ryzích) strategiích je výsledek best-response diskrétní množina, ve smíšených strategiích je to nějaká podmožina množiny Δ_i a my následně ukážeme, že je kompaktní a konvexní. Z best-response plyne, že hráč i je v kontextu sub-profilu σ_{-i} indiferentní mezi všemi $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

To nás přivádí k otázce: Jak je velká množina $BR_i(\sigma_{-i})$?

Mějme hru:

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

Prohlásíme, že její smíšené ekvilibrium je:

$$MNE = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)$$

Funkce π_1 udává očekávaný užitek řádkového hráče v závislosti na hraném smíšeném profilu daném pravděpodobnostmi p a q.

$$\pi_1 = 5pq - p - 3q + 2$$

Funkce best-response je tedy hledání maxima přes všechny smíšené profily řádkového hráče

$$\Delta_1 = \{(p, 1-p) | p \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

tedy zkráceně přes všechna $p \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$BR_1(\sigma_{-1} = (q, 1-q)) = \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} [\pi_1(p, q)]$$

Experimentálně tedy můžeme dojít k těmto závěrům:

$BR_1((\frac{1}{10}, \frac{9}{10})) = \max_{p \in \langle 0,1 \rangle}[-0.5p + 1.7] \Rightarrow p := 0$

$BR_1((\frac{9}{10}, \frac{1}{10})) = \max_{p \in \langle 0,1 \rangle}[3.5p - 0.7] \Rightarrow p := 1$

$BR_1((\frac{1}{5}, \frac{4}{5})) = \max_{p \in \langle 0,1 \rangle}[5p \cdot 0.2 - p - 3 \cdot 0.2 + 2] = 1.4$

Zde již BR není závislé na p, tzn. $BR_1(q = 0.2) = \Delta_1$. Avšak pouze pro jeden bod v Δ_1 je to podobně u sloupcového. Kdybychom funkce BR_1 a BR_2 vynesli do grafu, pak je bod rovnováhy v místě, kde se obě křivky (reakční křivky) protnou.

4.5 Pevný bod korespondence

V předchozí kapitole bylo vidět, že funkce best-response není funkcí v pravém slova smyslu – na jeden vstup může vrátit obecně více výstupů (což je tedy obecná vlastnost best-response). Striktně matematicky vzato proto nemůžeme mluvit o funkci best-response, ale o tak zvané korespondenci best-response. Co znamená pojem korespondence?

Definice 22. *Korespondence $c : A \rightarrow\rightarrow B$ je zobecněná totální funkce nebo multi-value funkce, která každému $a \in A$ přiřazuje (neprázdnou) podmnožinu B.*

Alternativně můžeme korespondenci zapisovat jako funkci $c : A \rightarrow 2^B$, s vlastností $\forall a \in A : c(a) \neq \emptyset$.

Při zkoumání best-response korespondence nás bude zajímat, jestli rekurzivní proces hledání ekvilibria se může obecně vzato někdy zastavit. Programátorsky si to představme jako volání funkce BR na nějaký náhodně zvolený profil. Ekvilibrium je pak dáno posloupností volání

$$\sigma^* = BR(BR(BR(BR(...))))$$

a nás zajímá, zda-li je tato posloupnost konečná a zda-li může dojít do stavu, kdy $\forall i \in Q : \sigma_i^* = BR_i(\sigma_{-i}^*)$. Proto je nyní důležitý pojem *pevného bodu*.

Definice 23. *Mějme korespondenci $c : A \rightarrow\rightarrow A$. Pevný bod (fixed-point) korespondence c je takový bod $x^* \in A$, že*

$$x^* \in c(x^*)$$

Nashovo ekvilibrium je strategický profil σ^* takový, že $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$ pro všechny $i \in Q$. Je to tedy pevný bod BR-korespondence:

$$BR(\sigma) = (BR_1(\sigma_{-1}), BR_2(\sigma_{-2}), \ldots, BR_N(\sigma_{-N}))$$

Pokud dokážeme, že kterákoliv BR-korespondence může mít pevný bod, pak existuje MNE pro kteroukoliv hru. Existuje věta (Kakutani's fixed-point theorem), která stanovuje podmínky, aby korespondence měla pevný bod. Pokud ukážeme, že BR splňuje tyto podmínky, pak má pevný bod, tzn. hra má ekvilibrium. Ukážeme si Kakutaniho theorém a Nashův důkaz.

4.6 Kakutani's fixed point theorem

Shizuo Kakutani (1911–2004) stanovil ve své větě o pevném bodu korespondence následující podmínky, aby zadaná korespondence měla pevný bod. Tento teorém nás bude zajímat, protože s jeho pomocí dokážeme, že smíšená best-response korespondence má z principu vždy pevný bod a tudíž smíšené Nashovo ekvilibrium existuje obecně pro každou hru.

Věta 4. *Korespondence $r : A \rightarrow\rightarrow A$ má pevný bod, pokud platí:*

1. *A je kompaktní, konvexní, neprázdná podmnožina (konečně-rozměrného) Euklidovského prostoru,*

2. *$r(a)$ je neprázdná pro všechny $a \in A$,*

3. *$r(a)$ je konvexní pro všechny $a \in A$,*

4. *$r(\cdot)$ je shora hemispojitá (ekv. s podmínkou, že má uzavřený graf).*

4.7 Důkaz Nashovy věty o existenci MNE v konečných hrách

V důkazu budeme vyšetřovat funkci

$$BR_i(\sigma_{-i}) = arg\left[\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi(\sigma_i, \sigma_{-i})\right]$$

a následně

$$BR(\sigma) = (BR_1(\sigma_{-1}), BR_2(\sigma_{-2}), ..., BR_N(\sigma_{-N}))$$

Jejich zkoumáním dojdeme k závěru, zda-li naplňují nezbytné podmínky Kakutaniho, aby mohly formovat smíšené Nashovo ekvilibrium.

Berge's Theorem of the Maximum

Věta 5. *Nechť $X \subset \mathbb{R}^d, M \subset \mathbb{R}^z$ jsou kompaktní a konvexní množiny. Nechť je funkce $f(x,m) : X \times M \to \mathbb{R}^1$ spojitá na X a M. Korespondence $c : M \to\to X$ definovaná jako*

$$c(m) = arg\left\{\max_{x \in X}[f(x,m)]\right\}$$

je neprázdná pro každé $m \in M$ a shora hemispojitá.

Na funkci $f(x,m)$ můžeme pohlížet jako na hodnotící funkci optimalizátoru, kde m je vstupní specifikace problému a řešení se hledá přes všechny $x \in X$. Všimněte si podobnosti s BR-korespondencí.

V konečných hrách jsou S_i konečné (diskrétní) množiny. Jejich smíšené rozšíření Δ_i jsou ovšem kompaktní a konvexní množiny (a rozhodně neprázdné). Tzn., **první podmínka Kakutaniho byla splněna**.

Z definice hry plyne, že $\pi_i(\cdot)$ jsou lineární funkce a proto spojité na Δ_i. Z Bergova theorému o maximu proto plyne, že $BR_i(\sigma_{-i})$ je proto neprázdná pro všechny $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ a shora hemispojitá. **Druhá a čtvrtá Kakutaniho podmínka splněna**.

Definice lineární funkce (zobrazení)

Definice 24. *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^m$ a $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Zobrazení $F : X \to Y$ se nazývá lineární, pokud pro všechny $x, y \in \mathbb{R}^m$ a $q \in \mathbb{R}$ platí současně:*

1. $F(x + y) = F(x) + F(y)$
2. $F(q \cdot x) = q \cdot F(x)$

Protože $\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ je lineární pro libovolné σ_{-i}, pak najdeme-li dva body σ_i', σ_i'' takové, že

$$\pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \tag{4.1}$$

tzn. $\sigma_i', \sigma_i'' \in BR_i(\sigma_{-i})$, pak (z linearity):

$$\pi_i(\lambda\sigma_i' + (1 - \lambda)\sigma_i'', \sigma_{-i}) =$$

$$= \lambda\pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + (1 - \lambda)\pi_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) =$$

$$= \lambda\pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + \pi_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) - \lambda\pi_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \tag{4.2}$$

Protože předpokládáme (4.1), pak můžeme v (4.2) pro snadější čtení provést substituci

$$A = \pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma_i'', \sigma_{-i})$$

a číst (4.2) jako

$$\lambda A + A - \lambda A = A$$

To znamená, že

$$\pi_i(\lambda\sigma_i' + (1 - \lambda)\sigma_i'', \sigma_{-i}) = \pi_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

pro libovolné $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Jinak řečeno, očekávaný zisk ve všech bodech $BR_i(\sigma_{-i}$ je stejný a funkce BR vrací množinu, která je rozhodně konvexní. **Třetí podmínka Kakutaniho byla splněná.**

Podmínky Kakutaniho věty byly splněny, tím pádem je $BR(\sigma)$ korespondence s pevným bodem, tzn.

má-li σ^* být rovnovážný bod ve smíšených strategiích, pak rozhodně platí, že

$$\sigma^* \in BR(\sigma^*)$$

Tak J. Nash v roce 1950 (zasláno k recenzi Nov 1949) v článku *Equilibrium Points in N-person Games* dokázal univerzální řešitelnost konečných nekooperativních her. Tento článek je rozhodně pozoruhodný a zaslouží si, aby se s ním každý student Teorie her seznámil.

Chapter 5

Nekooperativní hry s nulovým součtem

Nekooperativní hry s nulovým součtem[1] jsou speciálním případem strategických nekooperativních her s nenulovým součtem. Jejich řešení přišlo historicky dříve (von Neumann, Věta o minimaxu), protože jsou koncepčně i výpočetně jednodušší. Dříve se i věřilo, že veškeré strategické konflikty jsou charakteru nulového součtu, což později John Nash vyvrátil svým řešením ve hrách s nenulovým součtem.

Zopakujme si definici hry s konstantním, respektive nulovým součtem:

Definice 25. *Mějme hru Γ. Řekneme, že Γ je hra s konstantním součtem $k \in \mathbb{R}$, pokud platí*

$$\forall s \in S : \sum_{i \in Q} U_i(s) = k$$

Pokud je $k = 0$, pak je Γ hra s nulovým součtem.

Hry s nulovým součtem bývají pro svůj strategický charakter nazývány *strictly competitive games*. Míra výhry jednoho značí míru prohry druhého. V sociálních vědách jsou tyto hry známy také pod názvem *antagonistické hry (konflikty)*.

Definice 26. *Antagonistický konflikt je rozhodovací situace N hráčů, kteří se po volbě svých rozhodnutí rozdělí o pevně stanovenou částku, jejíž výše nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili.*

Příklad

Dvě firmy (Perrier, Apollinaris) soupeří na trhu s minerální vodou. Jejich marketingové oddělení řeší problém, jestli zvolit vysokou cenu ($2) nebo nízkou cenu ($1) za jednu lahev minerálky. Obě firmy ví, že při ceně $2 se prodá 5000 lahví (tržba $10.000) a při ceně $1 se prodá 10000 lahví (tržba $10.000). Při stejné ceně obou se hráči rovnoměrně podělí o trh. Pokud je jeden levnější, získá celý trh. Fixní náklady firem, tzn. bez ohledu na realizovanou produkci/prodej jsou $5000 za dané období. Hru dokumentuje matice užitků zapsaná dle obvyklé konvence na obrázku 5.1.

[1] Kapitola byla zpracována s použitím přednášek Magdaleny Hykšové z FD ČVUT

Perrier/Appollinaris	\$1	\$2
\$1	0,0	5000,-5000
\$2	-5000,5000	0,0

Figure 5.1: Hra mezi Perrierem a Appollinarisem

Je vidět i při zápisu dvou užitků dvou hráčů, že suma užitků v každém profilu je nulová a že tudíž pracujeme se hrou s nulovým součtem.

5.1 Vztah nulového a konstantního součtu

Abychom od počátku pracovali s vědomím, že hry s konstantním součtem jsou všechny v podstatě hrami s nulovým součtem, vyslovíme následující větu:

Věta 6. *Nechť Γ_k je hra s konstantním součtem $k \in \mathbb{R}$. Potom existuje hra Γ_0 s nulovým součtem taková, že je strategicky ekvivalentní s Γ_k.*

Důkaz bude založen na nalezení A_i, B_i koeficientů pro strategickou ekvivalenci a předvedeme si to pouze na příkladě.

Příklad: převod k-sum hry na 0-sum hru

Mějme hru s konstantním součtem ($k = 2$):

	a	b
c	0,2	1,1
d	-1,3	2,0

Hledáme koeficienty transformace A_1, A_2, B_1, B_2 na strategicky ekvivalentní hru s nulovým součtem. Tyto koeficienty jsou pro nás tudíž neznámé v následujících rovnicích:

$U'_{11} = 0A_1 + B_1 \quad U'_{21} = 2A_2 + B_2$

$U'_{12} = A_1 + B_1 \quad U'_{22} = A_2 + B_2$

$U'_{13} = -A_1 + B_1 \quad U'_{23} = 3A_2 + B_2$

$U'_{14} = 2A_1 + B_1 \quad U'_{24} = 0A_2 + B_2$

Užitky $U'_{ij}; i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ jsou taky neznámé. Máme zatím 12 neznámých a pouze 8 rovnic. Dále přidáme rovnice vyžadující nulovost součtu užitků v jednotlivých profilech:

$$\forall j \in \{1, 2, 3, 4\} : U'_{1j} + U'_{2j} = 0$$

Pokud tedy sledujeme rovnosti $U'_{1j} + U'_{2j} = 0$, pak obdržíme soustavu lineárních rovnic o čtyřech neznámých:

$B_1 + 2A_2 + B_2 = 0$
$A_1 + B_1 + A_2 + B_2 = 0$
$-A_1 + B_1 + 3A_2 + B_2 = 0$
$2A_1 + B_1 + B_2$
Nebo vyjádřenou její maticovou formou:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Máme homogenní soustavu rovnic, kde jsou ovšem lineární závislosti, tzn. vede na nekonečně mnoho řešení (to nás nepřekvapuje, neboť to očekáváme).

Navrhněme $A_1 = A_2 = 1$, tzn.: $B_1 + B_2 = -2$ a zvolme $B_1 = B_2 = -1$.

Původní hra se tedy transformuje na hru:

	a	b
c	-1,1	0,0
d	-2,2	1,-1

Stejně tak s jinými transformačními koeficienty $A_i = 1, B_1 = 0, B_2 = -2$ na:

	a	b
c	0,0	1,-1
d	-1,1	2,-2

5.2 Zápis 0-sum hry

Pokud platí, že $\forall s \in S : U_1(s) + U_2(s) = 0$, pak lze psát pouze jednu matici $U(s)$ a definovat $U_1(s) = U(s), U_2(s) = -U(s)$.

2,-2	5,-5	0,0
3,-3	1,-1	2,-2
4,-4	3,-3	6,-6

$\Rightarrow$

2	5	0
3	1	2
4	3	6

Hru dvou hráčů s nulovým součtem s konečnými množinami strategií $S_1 = \{s_1^1, s_2^1, ..., s_m^1\}$ a $S_2 = \{s_1^2, s_2^2, ..., s_n^2\}$ lze zadat pomocí matice A vyjadřující zisky prvního hráče:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(s_1^1, s_1^2) & U_1(s_1^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_1^1, s_n^2) \\ U_1(s_2^1, s_1^2) & U_1(s_2^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_2^1, s_n^2) \\ \dots & & & \\ U_1(s_m^1, s_1^2) & U_1(s_m^1, s_2^2) & \dots & U_1(s_m^1, s_n^2) \end{pmatrix}$$

Definice 27. *Hra dvou hráčů s nulovým součtem je* $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$*, kde*

- $Q = \{1, 2\}$ *je množina hráčů.*
- S_1 *a* S_2 *jsou množiny ryzích strategií hráčů.*
- $U : S \to \mathbb{R}$ *je výplatní funkce ve hře. Užitkem hráče jedna je* $U_1(s) = U(s)$*,* $U_2(s) = -U(s)$*.*

Oba hráči mají shodné vnímání preference v tom smyslu, že preferují užitek x před y, právě tehdy když $x > y$. To znamená pro sloupcového hráče, že preferuje například -2 nad -10.

Často budeme 0-sum hru zapisovat maticí hry A, pak by hra byla struktura $\Gamma = (Q; S_1, S_2; A)$. Jistě může být 0-sum hra s více hráči (interpretace užitků). Zde budeme rozvíjet výhradně dvouhráčové 0-sum hry.

5.3 Chování hráče v 0-sum hře

Mějme hru zadanou maticí A takto:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Každý hráč ví, že na každý jeho případný tah bude protihráč reagovat svou best-response strategií. Řádkový tudíž ví, že sloupcový bude na řádku hledat minimum, což je jeho BR – hráč takto minimalizuje svou prohru. Minimum na řádku je pro řádkového tudíž důležité. Může ovšem zvolit takové minimum, které je mezi všemi řádky nejlepší (největší). Je to hledání **maxima mezi minimy**.

- Minimum prvního řádku: 0,
- druhého: 1,
- třetího: 3,

Závěr: pokud bude řádkový hráč hrát třetí řádek, pak dostane nejhůř zisk 3. Musí předpokládat racionalitu sloupcového hráče. Hledání minima na řádku není paranoidní chování, pouze předpoklad racionality u sloupcového hráče.

Řádkovému hráči říkáme **maxminimizer**.

Volba sloupcového

Sloupcový přemýšlí podobně a přitom opačně. V prvním sloupci je sice jeho nejlepší zisk 2 (tzn. -2), ale musí počítat s tím, že řádkový bude hrát třetí řádek (jako svou BR). Pro první sloupec je tudíž jeho nejvyšší možná ztráta 4 (druhý: 5, třetí: 6). Sloupcový hráč minimalizuje svoji ztrátu, proto volí první sloupec.

Sloupcový hráč tudíž hledá maximum ve sloupci a globálně **minimum mezi maximy**. Sloupcovému hráči říkáme **minimaximizer**.

5.4 Rovnovážné strategie tvořící ekvilibrium ve hře

Připomeňme definici rovnovážného bodu (s_1^*, s_2^*) v dvouhráčové hře.

Definice 28. *Profil* (s_1^*, s_2^*) *představuje rovnovážné strategie hráčů, pokud platí:*

$$U_1(s_1, s_2^*) \leq U_1(s_1^*, s_2^*)$$

$$U_2(s_1^*, s_2) \leq U_2(s_1^*, s_2^*)$$

pro všechny $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.

Užitkové funkce definujeme $U_1(\cdot) = U(\cdot)$, $U_2(\cdot) = -U(\cdot)$. Pak píšeme, že v rovnovážném bodě musí platit pro řádkového hráče:

$$U(s_1, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2^*) \tag{5.1}$$

Z pohledu sloupcového to je

$$-U(s_1^*, s_2) \leq -U(s_1^*, s_2^*)$$

což vede na (násobení nerovnice zápornou konstantou se mění směr nerovnosti):

$$U(s_1^*, s_2) \geq U(s_1^*, s_2^*) \tag{5.2}$$

Z předchozích vztahů (5.1) a (5.2) plyne celkově:

$$U(s_1, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2^*) \leq U(s_1^*, s_2)$$

Jinak řečeno, užitek pro řádkového hráče je jeho dosažitelné maximum a pro sloupce dosažitelné číselné minimum (které je jeho maximem). Hodnota $U(s_1^*, s_2^*)$ se nazývá **cena hry** (taky hodnota hry, angl. game value).

5.5 Sedlový bod (saddle point)

Definice 29. *Mějme dvoumaticovou hru* $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$*. Ve hře definujeme minimax a maximin takto:*

$$\overline{m} = \min_{s_2 \in S_2} \left\{ \max_{s_1 \in S_1} U(s_1, s_2) \right\}$$

$$\underline{m} = \max_{s_1 \in S_1} \left\{ \min_{s_2 \in S_2} U(s_1, s_2) \right\}$$

Pro hru:

$$U(s_1, s_2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

to je $\overline{m} = 4$ a $\underline{m} = 3$.

Řádkový by tudíž hrál třetí řádek, sloupcový první sloupec. Jaký je ovšem zisk hráčů v profilu s indexy $(3, 1)$? Řádkový dostane o jedna lépe než čekal, sloupcový o jedna hůř (když to teď vidí, hrál by druhý sloupec). Sloupcový má tudíž tendenci změnit svoji strategii na druhý sloupec (pak dostane 3). Řádkový by pak změnil na první řádek...a stability hra nedosáhne.

Závěr: profil $(3, 1)$ není rovnovážný bod (není stabilní). Kdy ovšem bude volba hráčů vedoucí ke stabilnímu profilu?

Definice 30. *Mějme 0-sum hru* Γ*. Profil* s^* *je sedlovým prvkem, pokud platí, že:*

$$U(s^*) = \max_{s_1} \left\{ \min_{s_2} U(s_1, s_2) \right\} = \min_{s_2} \left\{ \max_{s_1} U(s_1, s_2) \right\}$$

tzn.

$$U(s^*) = \overline{m} = \underline{m}$$

To znamená, že sedlový bod má výplatu nejmenší na řádku a současně nejvyšší ve sloupci. Sedlový bod představuje rovnovážný stav (ryzí ekvilibrium) ve hře. Hodnota užitku v sedlovém bodě se nazývá *cena hry* (value). Sedlový bod je ekvivalent PNE ve hrách s nenulovým součtem. Podobně i tady nemusí v ryzích strategiích existovat.

Stejně jako u her s nenulovým součtem jsou tedy hry s:

- 0 sedlovými body,
- 1 sedlovým bodem,
- $n > 1$ sedlovými body.

Připomeňme, že 0-sum hry jsou speciálním případem her s nenulovým součtem, tzn. analytické postupy ve hrách s nenulovým součtem mohou být použity i ve 0-sum hrách.

Příklad:

Mějme hru:

1	1	8
5	2	4
7	0	0

pak její maxmin a minmax jou

$$\underline{m} = \overline{m} = 2$$

a tudíž stejné. Hra má tedy rovnovážný bod v ryzích strategiích.

5.6 Ekvilibrium 0-sum her ve smíšených strategiích

Smíšenou strategii v dvouhráčových hrách s nulovým součtem jenom mírně modifikujeme:

Definice 31. *Smíšená strategie hráče i ve hře Γ je vektor $p^i = (p_1^i, ..., p_{m_i}^i)$, kde*

1. $m_i = |S_i|$
2. $\forall j \in \{1, ..., m_i\} : p_j^i \in \langle 0, 1\rangle$
3. $\sum_{j=1}^{m_i} p_j^i = 1$

Definice 32. *Mějme dvouhráčovou hru s nulovým součtem $\Gamma = (Q; S_1, S_2; U)$. Smíšeným rozšířením této hry nazveme hru s prostory strategií*

$$S_1^s = \left\{ p, p = (p_1, ..., p_m) | \sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \forall j \in \{1, ..., m\} : p_j \in \langle 0, 1\rangle \right\}$$

$$S_2^s = \left\{ q, q = (q_1, ..., q_n) | \sum_{k=1}^{n} q_k = 1, \forall k \in \{1, ..., n\} : q_k \in \langle 0, 1\rangle \right\}$$

a výplatní funkcí (A je matice hry)
$\pi(p, q) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_j U(s_j, s_k) q_k = pAq^T$

Věta 7 (Minimax theorem, John von Neumann)**.** *V každé konečné 0-sum hře existuje řešení ve formě smíšených strategií.*

Originální znění von Neumanna v jeho historickém kontextu[2] bylo:

[2] J. von Neumann: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, In: Math. Annalen, vol. 100, 1928, pp. 295–320

For every two-person, zero-sum game with finite strategies, there exists a value V and a mixed strategy for each player, such that (a) Given player 2's strategy, the best payoff possible for player 1 is V, and (b) Given player 1's strategy, the best payoff possible for player 2 is -V.

Jiné znění:

Věta 8. *Vždy existují smíšené strategie* (p^*, q^*) *takové, že platí:*

$$\pi(p^*, q^*) = \max_p \min_q \pi(p, q) = \min_q \max_p \pi(p, q)$$

Hledáme tedy vektory p^*, q^* takové, že platí:

$$pAq^{*T} \leq p^*Aq^{*T} \leq p^*Aq^T$$

pro všechny $p \in S_1^s, q \in S_2^s$.

5.7 Grafické řešení maticových her ve tvaru (2,n) strategií

Pro jednoduchost se omezíme na hry, kde řádkový hráč má pouze dvě strategie a sloupcový jich má neomezeně. Očekávaný zisk hráče 1 ve smíšených strategiích $(p, 1-p)$ je při ryzích strategiích hráče 2 dán:

$$g_j(p) = pa_{1j} + (1-p)a_{2j} \quad j = 1, 2, ..., n$$

Hledáme (sloupcový hledá takové j, že $g_j(p)$ je minimální):

$$p^* = arg \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \left[\min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p) \right]$$

Nejprve budeme hledat funkci

$$\varphi(p) := \min_{j=1,2,\ldots,n} g_j(p)$$

Tato funkce je konkávní, po částech lineární a snadno lze nalézt bod jejího maxima. Hledaná cena hry je pak:

$$v = \varphi(p^*) := \max_{p \in \langle 0,1 \rangle} \varphi(p)$$

Nastává-li extrém v bodě p^*, kde $g_j(p^*) = g_k(p^*) = v$ pro jednoznačně určené strategie j, k, pak složky smíšené rovnovážné strategie hráče 2 s indexy různými od j, k jsou rovny nule. Složky, které mohou být nenulové, získáme vyřešením soustavy:

$$a_{1j}q_j + a_{1k}q_k = v \quad q_j + q_k = 1 \quad q_j \geq 0, q_k \geq 0$$

nebo

$$a_{2j}q_j + a_{2k}q_k = v \quad q_j + q_k = 1 \quad q_j \geq 0, q_k \geq 0$$

Demo výpočtu smíšeného řešení 0-sum hry

Mějme maticovou hru

$$\begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$g_1(p) = 5p + 4(1-p) = p + 4$$
$$g_2(p) = \tfrac{5}{2}p + 8(1-p) = -\tfrac{11}{2}p + 8$$
$$g_3(p) = 3p + 6(1-p) = -3p + 6$$

Připomeňme, že $g_j(p)$ vyjadřuje očekávaný zisk hráče 1 pro případy, kdy hráč 2 hraje strategie j. Míra výhry hráče 1 značí míru prohry hráče 2. Hráč 2 proto bude volit takové j, že $g_j(p), p \in \langle 0, 1\rangle$ bude minimální.

$\varphi(p)$ nabývá maxima v $p = \frac{1}{2}$, hodnota maxima je $v = 4.5$.

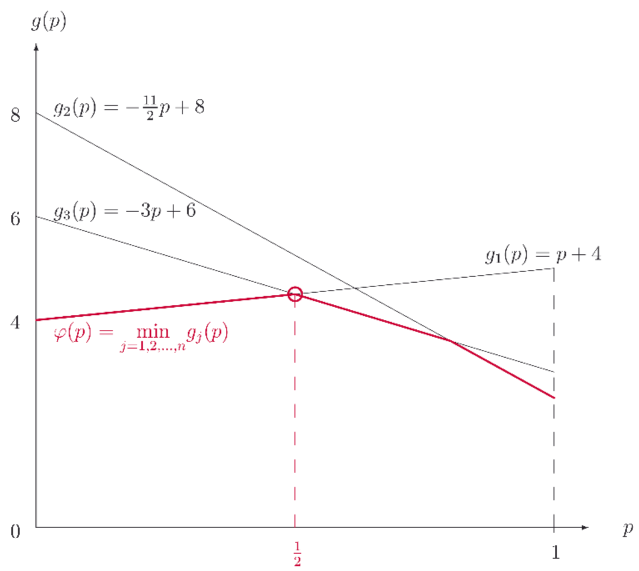

Figure 5.2: Reakční křivky v příkladě [obrázek převzat z přednášek M. Hykšové]

Maximum bylo nalezeno jako průsečík $g_1(p)$ a $g_3(p)$, tzn. $j, k = 1, 3$.

Dále řešíme soustavu rovnic (ještě nás zajímá q):

$$5q_1 + 3q_3 = 4.5$$
$$q_1 + q_3 = 1$$

s omezeními $q_1 \geq 0, q_3 \geq 0$. Získáváme řešení $q_1 = 0.75, q_3 = 0.25$.

Řešení hry je tedy smíšený rovnovážný bod

$$(p^*, q^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)\right)$$

Očekávaný užitek hráče 1 je:

$$\pi(p^*, q^*) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}5 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}3 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}6 =$$

$$= \frac{3}{8}5 + \frac{1}{8}3 + \frac{3}{8}4 + \frac{1}{8}6 = \frac{15 + 3 + 12 + 6}{8} = \frac{36}{8} = 4.5$$

Víme, že hráč hrající smíšenou strategii je indiferentní vůči všem svým ryzím strategiím s nenulovou pravděpodobností jako best-response na smíšenou strategii protivníka.

Hráč 1 očekává strategii q^* u protivníka, pak je mu jedno, jakou svoji strategii zvolí (obě mají nenulovou pravděpodobnost).

$\pi((1, 0), q^*) = 5\frac{3}{4} + 3\frac{1}{4} = \frac{15+3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$

$\pi((0, 1), q^*) = 4\frac{3}{4} + 6\frac{1}{4} = \frac{12+6}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$

Pokud hráč 2 uhne ze své strategie $(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4})$ na strategii $(0, 1, 0)$ při předpokladu, že hráč 1 stále hraje p^*, pak $\pi(p^*, (0, 1, 0)) = \frac{5}{2}\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = 5.25$ a to je pro hráče 2 horší výsledek (větší ztráta).

Ekvilibrium ve smíšených strategiích vyjadřuje optimální očekávaný zisk u obou hráčů. Pokud hráč 2 odhalí smíšenou strategii p^* protivníka, pak se rozhoduje mezi strategiemi 1 a 3, protože by jeho očekávaný zisk při hraní prostředního sloupce byl $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + 8\right) = 5.25$.

Bude-li hráč 1 hrát jinou strategii než $p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ nebo hráč 2 jinou než $q^* = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, pak dosáhnou horšího užitku.

Logika ekvilibria: Doufáme, že hráči tuto úvahu provedou a pochopí, že ekvilibrium pojmou za svoje chování.

Chapter 6

Korelované ekvilibrium v nekooperativních hrách

Korelované ekvilibrium je herní koncept, který zobecňuje Nashovo ekvilibrium. Poprvé bylo definováno Robertem Aumannem (Nobel. cena, 2005) v článku ”Aumann, R. (1974) *Subjectivity and correlation in randomized strategies*. Journal of Mathematical Economics 1:67-96”.

Korelované ekvilibrium (CE) je založeno na myšlence, že hráč volí svou strategii na základě pozorování nějakého veřejně známého signálu (signál je common knowledge). NE předpokládá, že hráč se rozhoduje pouze dle specifikace hry. Vedle toho, signál hráči ”napoví” tah. Pokud hráč uvěří, že všichni protihráči hrají dle CE a vidí, že by si pohoršil hraním jiného tahu (než je ten napovězený), pak je profil tvořený těmito nápovědami korelované ekvilibrium. Ve hře může existovat až nekonečná množina takových profilů. Budeme dále předpokládat racionalitu hráčů a volbu unikátního pareto dominantního profilu.

Nečekáme, že existuje ”centrální autorita”, která by hráčům vyřešila jejich problém a navrhla jim řešení. Spíše tím modelujeme fakt, že hráči žijí ve společném informačním kontextu (čtou stejné noviny) a je jim společná (je to common knowledge) racionalita ve smyslu snahy maximalizovat společný prospěch z volby strategického profilu. To povede také k tomu, že budeme při výpočtu korelovaného ekvilibria maximalizovat společenský užitek (efektivitu) vybraného profilu.

6.1 Motivační příklad

Uvažujme hru:

	a	b
A	9,9	6,10
B	10,6	0,0

Hra má dvě ryzí Nashova ekvilibria a jedno smíšené:

- PNE (A, b) s daným ziskem $(6, 10)$.
- PNE (B, a) s daným ziskem $(10, 6)$.
- MNE $((\frac{6}{7}, \frac{1}{7}), (\frac{6}{7}, \frac{1}{7}))$ s očekávaným ziskem $(8.57, 8.57)$.

Přepodpokládejme, že někdo hodí mincí (padne H nebo T), což je ten avizovaný veřejně pozorovatelný signál. Hráči souhlasí (a je to common-knowledge), že budou hrát:

- (A, b) v případě H,
- (B, a) v případě T.

Při této dohodě a s předpokladem synchrozniačního signálu je očekávaný zisk ve hře $(8, 8)$, což je očekávaný užitek hráčů pravděpodobnostně váhovaný $6 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5$.

Může hra skutečně takto proběhnout? Budou hráči respektovat příchozí stav signálu? Co Best-response hráčů?

- Padne-li H, hráč 1 ví, že hráč 2 bude hrát b (A je tedy Best-response)
- Padne-li T, hráč 1 ví, že hráč 2 bude hrát a (B je tedy Best-response)

Očekávané zisky nyní mohou výt vyšší než v MNE (pokud např. změníme v (A, a) zisky na $(8, 8)$).

Předpokládajme dále, že signál nemusí být až tak informačně úplný. Požádáme arbitra, aby hodil kostkou (výsledek n žádný z hráčů nevidí).

- Oznámíme hráči 1, zda-li n padlo do $\{1, 2\}$ nebo do $\{3, 4, 5, 6\}$.
- Oznámíme hráči 2, zda-li n padlo do $\{1, 2, 3, 4\}$ nebo do $\{5, 6\}$.

Dohoda je podobná, jako v předcházející konfiguraci, tedy:

- Hráč 1 hraje B, pokud $n \in \{1, 2\}$ nebo A při $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.
- Hráč 2 hraje a, pokud $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ nebo b při $n \in \{5, 6\}$.

Očekávaný zisk v této konfiguraci se změní na $(8.333, 8.333)$, což můžeme ověřit na BR_1:

- Pokud oznámíme hráči 1, že $n \in \{1, 2\}$, pak hráč ví, že hráč 2 bude hrát a. Pak je jeho BR_1 jednoznačně hrát B.
- Pokud se hráč 1 dozví, že hod padl do intervalu 3-6, tedy $n \in \{3, 4, 5, 6\}$, je situace mírně složitější. Hráč 2 nemá jistotu mezi hraním a a b, proto bude hrát $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pak je BR_1 hrát A.

Celkově je očekávaný zisk prvního hráče (s pravděpodobností $\frac{2}{6}$ hra skončí v profilu (B, a) a s pravděpodobností $\frac{4}{6}$ bude sloupcový hrát smíšeně $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$):

$$\pi_1 = \frac{2}{6}10 + \frac{4}{6}(\frac{1}{2}9 + \frac{1}{2}6) = 8.333$$

6.2 Definice korelovaného ekvilibria

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$. CE je od Nashova ekvilibria definováno odlišně v tom smyslu, že přiřazuje každému profilu $s \in S$ pravděpodobnostní ohodnocení $\pi(s)$. Řešením hry z pohledu CE je tedy vektor $\pi = (\pi(s))_{s\in S}$.

Definice 33. *Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i\in Q}; \{U_i\}_{i\in Q})$ a vektor $\pi = (\pi(s))_{s\in S}$ takový, že:*

1. $\pi(s) \in \langle 0, 1\rangle \quad \forall s \in S$
2. $\sum_{s\in S} \pi(s) = 1$

Vektor π je korelovaným ekvilibriem ve hře Γ, pokud platí pro všechny hráče $i \in Q$ a každé dvě strategie $s_i, d_i \in S_i, d_i \neq s_i$:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot (U_i(s_i, s_{-i}) - U_i(d_i, s_{-i})) \geq 0$$

Bylo by dobré si nyní rozebrat, co tato definice říká o chování hráčů. Vyplyne z toho i logika výpočtu CE v zadané hře. **Množina nerovnic modeluje, co hráč rozhodně nikdy nepřipustí – co neudělá.** Výraz $(U_i(s_i, s_{-i}) - U_i(d_i, s_{-i}))$ vyhodnocuje změnu užitku hráče i, pokud by v sub-profilu s_{-i} přešel ze své strategie s_i na d_i. Tento přechod (deviace) je pochopitelně možný pouze z profilů, kde hráč i hraje s_i, tedy každá nerovnice modeluje zlepšení/zhoršení hráčova očekávaného užitku pro jednu konkrétní dvojici strategií s_i, d_i. Hráč připustí takovou deviaci pouze v případě, že v sumě $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \pi(s_i, s_{-i}) \cdot (U_i(s_i, s_{-i}) - U_i(d_i, s_{-i})) \geq 0$ vede k nezápornému očekávanému zisku. Pokud tedy tato má být platná pouze v případě, že proměnné $\{\pi(s_i, s_{-i})\}_{s_{-i}\in S_{-i}}$ jsou nulové, pak jsou tyto pravděpodobnosti nulové globálně a tedy pro všechny hráče a celou hru.

Tato sada nerovnic konstruuje v pravděpodobnostním prostoru dimenze $|S|$ konvexní mnohoúhelník (angl. polytope), něco jako vyjednávací prostor, kde všechny body tohoto prostoru jsou pro hráče přípustné a dosažitelné (feasible) a hledáme jejich racionální bod dohody (pareto efektivní), tedy opět někde na ohraničení této množiny. Hledání pareto optimálního korelovaného ekvilibria je LP-úloha maximalizující společný užitek.

Korelované ekvilibrium je zobecněním MNE, tedy každé MNE je CE, ale naopak to neplatí. Vztah MNE a CE dokumentuje následující věta (její důkaz je dostupný na stránkách THE):

Věta 9. *Je-li σ^* MNE, pak $\pi = \left(\Pi_{i=1}^{N} \sigma^*(s_i)\right)_{s\in S}$ je korelované ekvilibrium.*

Korelované ekvilibrium je z nepochopitelných důvodů na okraji zájmů herních teoretiků, i přesto, že je sympatické z mnoha důvodů:

- CE je nadmnožina MNE, tzn. všechny MNE jsou současně CE. Plyne z toho, že *CE vždy existuje*. Nash dokázal, že MNE vždy existuje, proto vždy existuje CE.

- Christos Papadimitriou dokázal (článek "Computing correlated equilibria in multi-player games", In: 37th ACM Symposium on Theory of computing), že výpočet CE je v polynomické časové složitostní třídě, což je značný posuv od obecně exponenciální složitosti výpočtu smíšeného Nashova ekvilibria. Připomeňme, že pro výpočet MNE ve více-hráčových hrách prakticky neexistuje algoritmus jejich výpočtu (natož pak nějakého efektivního výpočtu).
- Martin Hrubý navrhl algoritmus efektivního výpočtu CE se zapojením paralelismu (článek "Algorithmic Approaches to Game-Theoretical Modeling and Simulation, In: AUCO Czech Ecomomic Review, on-line: auco.cuni.cz). Tento algoritmus je obvzlášť efektivní při současné potřebě vyčíslovat užitky $U(s)$ v profilech s nějakým dalším modelem.
- Existuje efektivní nástroj výpočtu CE pod názvem CE-Solver[1] autorů S. Žídka a M. Hrubého.
- Výpočet CE je založen na lineárním programování. Algoritmus jeho výpočtu je jednoduchý, jednoznačný a bez výjimek. Algoritmus neodlišuje mezi dvouhráčovou a více-hráčovou hrou.

6.3 Výpočet CE obecně (LP-úloha)

Množina korelovaných ekvilibrií pro zadanou hru je obecně nekonečná (je to podprostor vymezený nerovnicemi z definice CE). Budeme z této množiny vybírat unikátní Pareto efektivní profil, který má CE vlastnost. To znamená, že maximalizujeme souhrnný užitek $Z(s)$ v CE profilu Z:

$$MAX : Z = \sum_{s \in S} \pi(s) Z(s)$$

$$Z(s) = \sum_{i \in Q} w_i \cdot U_i(s)$$

Teoreticky můžeme vliv hráčů váhovat nějak vhodně zvolenými koeficienty w_i, ale pokud hráči nejsou silně nesymetričtí, nebudou mít tyto koeficienty valný vliv na volbu profilu. Proměnné v této LP-úloze budou pravděpodobnosti jednotlivých profilů hry:

$$\pi(s) \in \langle 0, 1 \rangle \, ; \forall s \in S$$

Omezující podmínky (constraints) jsou dány principem pravděpodobnostního charakteru CE:

$$\sum_{s \in S} \pi(s) = 1$$

A další omezení jsou dány maticí užitků (obecně):

[1] Dostupný na http://perchta.fit.vutbr.cz/CE-Solver/

$$G \cdot \pi^T \geq 0$$

Matice G je definována takto:

- Řádky matice G jsou indexovány i, j, k, kde $i \in Q$, $j, k \in S_i$. Matice G Má tudíž $\sum_{i=1}^{N} |S_i| \cdot (|S_i| - 1)$ řádků.
- Sloupce jsou indexovány strategickými profily, je tudíž S sloupců v matici.
- Prvek matice $G_{i,j,k}$ v profilu $s \in S$ je dán:

$$G_{i,j,k}(s) = \begin{cases} U_i(j, s_{-i}) - U_i(k, s_{-i}) & s_i = j \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Řešíme LP-úlohu s proměnnými $\pi(s)$ a omezujícími podmínkami ($\sum_{s \in S} \pi(s) = 1, G \cdot \pi^T \geq 0$). Maximalizujeme Z. Výsledkem je naplnění proměnných $\pi(s)$ pravděpodobnostmi profilů. *Důležité je si uvědomit, že tento postup výpočtu vyhodnocuje jedno Pareto efektivní CE*. Není tudíž pravda, že existuje pouze jedno CE a to je jednoznačnou odpovědí na otázku "co hráči udělají?".

Tento algoritmus nijak není omezen počtem hráčů nebo jejich strategií – pouze výslednou časovou a paměťovou složitostí.

Demonstrační příklad výpočtu CE

Mějme zadanou hru:

A/B	c	d
a	10,2	8,4
b	5,4	7,3

Její profily jsou

$$S = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$$

G-matice (řádky modelují možné deviace hráčů, sloupce jsou všechny profily ve hře):

$j \to k$/s	ac	ad	bc	bd
$a \to b$	5	1		
$b \to a$			-5	-1
$c \to d$	-2		1	
$d \to c$		2		-1

Maximalizace $Z = \sum_{s \in S} \pi(s)Z(s)$. Systém nerovnic $G \cdot \pi^T \geq 0$ je následující:

$$
\begin{aligned}
5\pi(ac) + \pi(ad) &\geq 0 \\
-5\pi(bc) - \pi(bd) &\geq 0 \\
-2\pi(ac) + \pi(bc) &\geq 0 \\
2\pi(ad) - \pi(bd) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Druhá nerovnice jasně vede k $\pi(bc) = \pi(bd) = 0$. Z toho plyne: $-2\pi(ac) + 0 \cdot \pi(bc) \geq 0$ platí pouze pro $\pi(ac) = 0$.

Zbývá $\pi(ad) \geq 0 \wedge \sum \pi(s) = 1$, tzn. $\pi(ad) = 1$. CE v této hře je tedy vektor $(0, 1, 0, 0)$. Monohoúhelník v pravděpodobnostním prostoru řešení je tedy pouze singleton obsahující bod $(0, 1, 0, 0)$. Hra má tedy unikátní CE, které je současně unikátní PNE.

6.4 Princip CE obecně – analytický efekt G-matice

Množina nerovnic $G \cdot \pi^T \geq 0$ modeluje hráčovy tendence přecházet mezi strategiemi. Pokud je řádek $G_{i,j,k}(s)$ celý záporný (resp. $G_{i,j,k}(s) \leq 0; \forall s \in S$ a současně $\exists s \in S : G_{i,j,k}(s) < 0$), pak strategie k striktně dominuje nad j (přechodem z j na k se zhorší hráčův užitek). Pokud je řádek nulový, pak jsou strategie ekvivalentní. Takový řádek může být z LP-constraints vypuštěn, neboť nemá žádný efekt. Pokud existují kladné i záporné koeficienty $G_{i,j,k}(s)$, pak nelze nic o strategiích j, k říct. Pokud existují pouze kladné a nulové koeficienty, pak strategie j slabě dominuje nad k (nelze říct, že dominuje striktně).

Matice G zde vystupuje jako zajímavý analytický nástroj s velmi jednoduchou datovou strukturou. V následujícím algoritmu této vlastnosti využijeme pro iterativní eliminaci dominovaných strategií.

6.5 Optimalizovaný výpočet CE ve hře (Hrubý, 2008)

Tento algoritmus byl vyvinut pro výpočet CE ve vícehráčových hrách s mnoha strategiemi. Publikován byl ve formě volně šiřitelného nástroje pojmenovaného CE-Solver. Nástroj lze využít pro výpočet CE v zadané hře nebo přinejmenším k redukci prostoru profilů hry na menší hru (vede pak na menší LP-úlohu). Specificky je nástroj výhodný v těch situacích, kdy užitky hráčů v profilu s nejsou předem známy (jak to obvykle popisujeme tou maticí užitků), ale je nutno je na požádání vypočítat nějakou funkcí, zde referovanou jako $cellModel(s)$. Pokud výpočet této funkce není z hlediska časové náročnost algoritmu triviální, je nutno se zamyslet nad počtem volání $cellModel$, které musíme pro dokončení výpočtu CE absolvovat.

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$ a počítačový model (proceduru) $cellModel : S \to \mathbb{R}^N$ pro výpočet užitků $U(s) := cellModel(s)$. Předpokládejme, že výpočet $cellModel(s)$ je hlavní časovou zátěží na výpočet. Chceme omezit počet invokací $cellModel$ na minimum, tzn. hledáme minimální $S_r \subseteq S$ potřebnou pro vyhodnocení CE. Sestavujeme redukovanou hru, tzn. redukovanou $S_r \subseteq S$.

6.5.1 Redukce G-matice v našem příkladě

Postup redukce je popsán na obrázku 6.1.

	ac	ad	bc	bd
$a \to b$	5	1		
$b \to a$			-5	-1
$c \to d$	-2		1	
$d \to c$		2		-1

Řádek $b \to a$ je celý záporný, tudíž strategie b je striktně dominovaná strategií a. Další výpočty v profilech bc a bd již nebudou vyžadovány.

	ab	ad
$a \to b$	5	1
$c \to d$	-2	
$d \to c$		2

V tomto kontextu redukce hry vypadává řádek $c \to d$ a s ním i profil ab.

	ad
$a \to b$	1
$d \to c$	2

Zbývá pouze profil ad a tím i eliminace končí s vyhodnoceným ekvilibriem (dle předchozích poznatků je ekvilibrium neeliminovatelné při eliminaci striktně dominovaných strategií).

Figure 6.1: Iterativní eliminace dominovaných strategií v příkladu CE-Solveru

Bibliography

[1] Nash, J.: Non-cooperative Games, Annals op Mathematics Vol. 54, No. 2, 1951

[2] von Neumann, J., Morgenstern, O.: Theory of Games and Economic Behavior, 1944