Doprovodné texty ke kurzu Teorie her

Martin Hrubý
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

zimní semestr, akad. rok 2010/11

Contents

Chapter 1

Vyjednávání

V dosavadním textu jsme se zabývali situacemi, kdy hráči spolu nesmí nebo nechtějí komunikovat, aby se domluvili na konkrétním profilu.

Proč by vlatně měli hráči provádět pokusy o dohodu profilu? Ve Věznově dilematu je zjevné, že by se hráči mohli dohodnout na společné strategii nevypovídat a dosáhnout tak evidentně lepšího užitku než při nekooperativní hře. Nabízí se ovšem úvaha, jak by dohoda dopadla, kdyby se opět rozešli do svých cel a pak byli postaveni před rozhodnutí izolovaně. Jejich dohoda by byla postavena na víře, že žádný nezradí. Těžko uvěřit, že by vězni dostáli svého slibu.

Proto předpokládejme, že dohoda o profilu musí být pro hráče závazná. Musí existovat nějaký arbitr, který udělí tak vysokou pokutu zrádci, že se zrada racionálně vzato nevyplatí. Nemůžeme důvěřovat slibům, protože stále předpokládáme ryzí individuální racionalitu hráčů.

Ve strategických interakcích může dojít k situaci nekooperativní hry, která má sice svoje nekooperativní nashovo ekvilibrium, ale přesto hráči vidí možnost efektivnějšího výsledku hry, pokud se dohodnou na jiném profilu. Proces hledání dohody se nazývá vyjednávání (angl. bargaining).

Vyjednávací úlohy mají v literatuře více možných řešení. Jedno z nejznámnějších je řešení Johna Nashe z roku 1950 (odkaz) známé pod *Nash bargaining solution*. Nash svůj přístup k vyjednávání postavil na čtyřech axiomech. Ukázal pak, že pokud lze splnit tyto axiomy (podmínky), pak má úloha právě jedno optimální řešení – Nash bargaining solution.

1.1 Základní vyjednávací úloha

Předpokládejme dva hráče A a B. Hráči mají za úkol navrhnout rozdělení fixní částky X mezi sebe tak, že $x_A + x_B \leq X$, kde x_A je podíl pro hráče A a obdobně x_B je podíl pro hráče B. Pokud se dohoda nepovede, hráči budou vyplaceni nekooperativním užitkem c_A, c_B, kde lze předpokládat, že $c_i << X/2$. Konečně předpokládáme, že hráči mají obecně odlišný užitek $u_i(x_i)$ z přidělené částky x_i.

Problém pro vyjednávání je stanovení rozdělení (x_A^*, x_B^*) takové, že s ním oba hráči budou souhlasit.

Zatím bez teoretických znalostí Nashova řešení pouze převezmeme Nashův výsledný vzorec, kde Nash tvrdí, že optimální dohody lze dosáhnout maximalizací funkce:

$$g(u_A, u_B) = (u_A - c_A) \cdot (u_B - c_B)$$

V případě naší základní úlohy to znamená:

$$u_A(x_A) = x_A$$

$$u_B(x_B) = X - x_A$$

$$x_A + x_B \leq X$$

Tedy,

$$g(\cdot) = (x_A - c_A) \cdot (X - x_A - c_B)$$

Pokud položíme $X = 100$, $c_A = c_B = 0$, pak obdržíme:

$$g(\cdot) = x_A \cdot (100 - x_A)$$

Funkce g má extrém v bodě $g'(x_A) = 0$, tzn.

$$g' = [100x_A - x_A^2]' = 100 - 2x_A$$

$$g' = 0 = 100 - 2x_A$$

nám dává extrém v bodě $x_A = 50$, tedy rozdělení $(x_A^*, a_B^*) = (50, 50)$.

Tento výsledek není možná pro čtenáře překvapující, neboť užitkové funkce hráčů jsou symetrické a tudíž rozdělení musí nutně vést k rovnoměrnému rozdělení. V dalším příkladě uvidíme vliv nesymetrických funkcí užitku.

Základní vyjednávací úloha s nesymetrickou funkcí užitku hráčů

Předpokládejme, že hráč A je značně citlivý na riziko a proto jeho užitek z podílu neroste lineárně s výší podílu. Podle vztahu k riziku rozlišujeme hráče (vztah zisk–užitek, příklady užitkových funkcí):

- Neutrální k riziku (Risk-neutral): $u(x) = x$.
- Citlivý k riziku (Risk-averse): $u(x) = \sqrt{x}$.
- Vyhledávající riziok (Risk-seeking): $u(x) = x^2$.

Hráč A má tedy svou užitkovou funkcí následující (druhý hráč zůstává neutrální k riziku):

$$u_A(x_A) = \sqrt{x_A}$$

$$u_B(x_B) = x_B = 100 - x_A$$

Nyní je optimalizovaná funkce v tomto tvaru:

$$g(x_A) = (\sqrt{x_A}) \cdot (100 - x_A)$$

$$g' = \frac{100 - x_A}{2\sqrt{x_A}} - \sqrt{x_A}$$

a ta má extrém v bodě $x_A = \frac{100}{3}$, tedy rozdělení, se kterým oba souhlasí je $(\frac{100}{3}, 2 \cdot \frac{100}{3})$. Je vidět, že hráč citlivý k riziku souhlasí s menším podílem. V reálné situaci by proto nejspíš tento hráč svůj postoj rád před protiháčem utajil.

1.2 Definice vyjednávací úlohy

V tomto odstavci formálně zavedeme vyjednávací úlohu. Tato definice je univerzální pro všechny problémy tohoto druhu bez ohledu na volbu konkrétního vyjednávacího řešení.

Definice 1. *Vyjednávací úloha je definována jako dvojice* (Ω, c)*, kde*

- Ω *je tak zvaná vyjednávací množina, tedy množina všech dosažitelných dvojic užitků* (u_A, u_B).
- $c = (c_A, c_B)$ *je nekooperativní výsledek hry v případě nedosažení hodnoty (angl. disagreement value).*

Na obrázku 1.1 je vidět příklad vyjednávací množiny. Obrázek vymezuje prostor všech dosažitelných užitků pro hráče A a B, a současně ukazuje jejich nekooperativní výsledek. Hráči zřejmě povedou vyjednávání v té části množiny, kde dosahují lepších užitků než těch nekooperativních a navíc tím zcela vyčerpají dosažitelné rozdělitelné maximum (dané zde ohraničením vyjednávací množiny).

Všechny vyjednávací situace tohoto typu lze označit symbolem Σ. Vyjednávací řešení označíme přiřazením $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ a symbolem F_i budeme rozumět užitek hráče i. V tomto vyjádření nám zápis $F(\Omega, c)$ označuje výsledek zadané hry.

1.3 Axiomatická stavba Nashova vyjednávacího řešení

John Nash vyslovil ve svém článku[1] čtyři axiomy vyjednávání a dokázal, že existuje pouze jedna funkce (jedno řešení), která splňuje tyto axiomy. Projdeme si tyto axiomy a v závěru předvedeme

[1]Nash, J. (1950). The Bargaining Problem. Econometrica 18 (2)

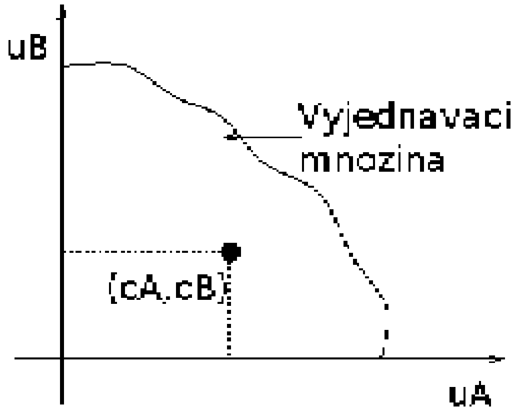

Figure 1.1: Vyjednávací množina ve hře dvou hráčů [obrázek převzat s přednášek M. Hykšové]

Nashův theorém o Nashově vyjednávacím řešení (bez důkazu). Podotkněme, že pochopitelně na vyjednávání existuje více názorů a řešení.

Nezávislost na lineárních transformacích užitkových funkcí

Axiom 1. *Nechť* $u'_i = \alpha_i u_i + \beta_i$ *a* $c'_i = \alpha_i c_i + \beta_i$, $\alpha_i > 0$. Ω' *je odvozeno od* Ω. *Pak* $F_i(\Omega', c') = \alpha_i F_i(\Omega, c) + \beta_i$ *pro* $i \in \{A, B\}$.

Předpokládáme tedy, že afinní transformace užitkových funkcí a nekooperativních užitků neovlivní vyjednávací proces. Víme, že dosáhneme ekvivalentní hry, která vykazuje stejné strategické charakteristiky (dominance, BR, ekvilibria).

Pareto efektivita řešení

Axiom 2. *Je-li* $F(\Sigma) = (u_A, u_B)$, *pak neexistuje jiný výsledek* $(u'_A, u'_B) \in \Omega$ *takový, že* $u'_i > u_i$ *pro některého hráče* i *a současně* $u'_j \geq u_j$ *pro* $j \neq i$.

Tento axiom předpokládá klasickou Pareto efektivitu, tzn. pokud hráči dojdou dohody (u_A, u_B), pak neexistuje jiné rozdělení (bargaining solution), ve kterém by alespoň jeden hráč byl s výsledkem striktně lepší a zbytek hráčů přinejmenším na stejně dobrém výsledku.

V rámci vyjednávací množiny existují výsledky $(u'_A, u'_B) \in \Omega$, kdy $u'_i > u_i$ platí pro některého hráče i a současně $u'_j < u_j$ pro $j \neq i$. Tyto však nezkoumáme jako přijatelné.

Z axiomu především plyne, že budeme zkoumat ohraničení vyjednávací množiny, které tvoří množinu Pareto efektivních profilů.

Vlic symetrie užitkových funkcí na výsledek

Axiom 3. *Připusťme* $c_A = c_B$ *a předpokládejme, že* $(u_A, u_B) \in \Omega$ *právě tehdy pokud* $(u_B, u_A) \in \Omega$. *Pak* $F_A(\Omega, c) = F_B(\Omega, c)$.

Mají-li hráči stejné vstupní podmínky a jsou-li jejich užitky dostupné i jejich protivníkům, pak musí dojít k rovnému rozdělení X. Symetrie zavádí formu spravedlnosti mezi hráči. Zdůrazněme, že symetrii nenaruší jenom rozdílnost užitkových funkcí, ale i nesymetrie nekooperativních výsledků. Logicky, pokud jeden hráč při nedohodě získá více než druhý, pak je jeho počáteční vyjednávací situace lepší než u protihráče.

Nezávislost na irelevantních alternativách

Nezávislost na irelevantních alternativách (angl. Independence of Irrelevant Alternatives) je obecný, velmi důležitý předpoklad ve všech částech teorie her, kde se očekává zkoumání preferencí.

Axiom 4. *Mějme dvě vyjednávací situace (Ω, c) a (Ω', c) takové, že $\Omega' \subseteq \Omega$ a $F(\Omega, c) \subseteq \Omega'$. Pak $F(\Omega, c) = F(\Omega', c)$.*

Máme vyjednávací oblast Ω a její řešení $F(\Omega, c)$. Pokud by se hypoteticky mělo vyjednávání omezit na podmnožinu $\Omega' \subseteq \Omega$ a současně by řešení původního problému $F(\Omega, c)$ zůstávalo prvkem Ω', pak v problému Ω' není možné dojít k jinému řešení než $F(\Omega, c)$.

Prostor $\Omega' \setminus \Omega$ tvoří irelevantní alternativy, jejichž přítomnost nebo nepřítomnost ve vyjednávací množině nesmí mít vliv na výsledek vyjednávání.

Po formulaci čtyřech vstupních předpokladů na nich J. Nash formuloval následující theorém.

Věta 5. *Vyjednávací řešení $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ naplňuje axiomy 1-4 právě tehdy, pokud je to Nashovo vyjednávací řešení.*

Pro doplnění toho podstatného detailu, co je to vlastně to Nashovo vyjednávací řešení (Nash bargaining solution) formulujme větu jinak:

Věta 6. *Existuje pouze jedna funkce $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ modelující Nashovo vyjednávací řešení. Je definována jako $F(\Omega, c) = (u_A^*, u_B^*)$, kde*

$$(u_A^*, u_B^*) = arg \max_{u_A, u_B} \{(u_A - c_A)(u_B - c_B) \mid (u_A, u_B) \in \Omega \wedge u_A \geq c_A, u_B \geq c_B\}$$

Chapter 2

Kooperativní hry s přenositelným užitkem

2.1 Úvod

Kooperativní hry navazují na vyjednáváním v tom směru, že tématem vyjednávání je utvoření koalic a případné přerozdělení zisku koalice. Na první pohled se bude zdát, že v kooperativních hrách není patrný zájem jedince, jeho strategie a případný zisk. Tyto pojmy se vyjasní v průběhu následujícího textu.

Jako obvykle, budeme zkoumat množinu hráčů Q obsahující N hráčů. Hráči mohou vyjednávat o utvoření koalic, kde koalicí K rozumíme neprázdnou podmnožinu množiny hráčů. Pokud tedy neuvažujeme prázdnou koalici, lze z N hráčů utvořit celkem $2^N - 1$ koalic. Koalici tvořenou všemi hráči budeme nazývat velkou koalicí.

Začneme definicí kooperativní hry dané charakteristickou funkcí:

Definice 2. *Kooperativní hra ve tvaru charakteristické funkce je dána množinou hráčů*

$$Q = \{1, 2, ..., N\}$$

a reálnou funkcí

$$v : 2^Q \to \mathbb{R}$$

takovou, že $v(\emptyset) = 0$.

Charakteristickou funkcí budeme označovat celou hru. Hodnoty $v(\subseteq Q)$ udávají sílu jednotlivých možných koalic. Abychom lépe vyjádřili následující definice a věty, zavedeme množinu G^N všech N-hráčových kooperativních her, lépe řečeno množinu všech možných funkcí $v : 2^Q \to \mathbb{R}$. Konkrétní hru pak budeme vybírat z této množiny, tedy budeme psát $v \in G^N$.

Hráči dohodnou utvoření koalic a koalice jsou vyplaceny dle charakteristické funkce. Charakteristické funkce ovšem neurčují, kolik mají dostat vyplaceno jednotliví hráči a vzniká tedy další problém k vyjednávání a tím je přerozdělení zisku.

Teorie kooperativních her je poměrně velmi rozsáhlá. Zájemce o podrobnější definice může prostudovat obsáhlejší práce[1]. My se zaměříme zkráceně na tyto její podstatné části:

- Vyjádření individuálního zisku hráčů ve hře a tudíž i individuální racionality hráčů – povede to k definici pojmu imputace.
- Koncepty řešení kooperativních situací a tedy vlastně formy ekvilibrií – zavedeme pojmy jádro hry, Shapleyho hodnota a nukleolus.
- Vazba nekooperativních a kooperativních her.

Předně si uvědomíme, že nás příliš nezajímají tak zvané nepodstatné hry:

Definice 3. *Hra $v \in G^N$ se nazývá nepodstatná, pokud platí:*

$$v(Q) = \sum_{i \in Q} v(\{i\})$$

Pokud hra není nepodstatná, pak se nazývá podstatná.

V nepodstatné hře spojením dvou jednotlivců i a j vznikne koalice, která má hodnotu sumy hodnoty $v(\{i\})$ a $v(\{j\})$. V takové hře nemá smysl tvořit koalice, protože nepřinášejí žádnou přidanou hodnotu.

Podobně vyznívá definice aditivní hry:

Definice 4. *Hra $v \in G^N$ se nazývá aditivní, pokud platí:*

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T)$$

pro všechny $S, T \subseteq Q$, kde $S \cap T = \emptyset$

2.2 Vyjádření individuálního zisku v kooperativních hrách

Představme si kooperativní hru třech hráčů $Q = \{A, B, C\}$, jejíž charakteristická funkce je dána $v(\emptyset) = 0, v(A) = v(B) = v(C) = 1, v(\{A, B\} = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 5, v(Q) = 100$. Hráči by zřejmě svolili k utvoření velké koalice, jejíž výplata by byla 100, ale co by dělali s obdrženým ziskem? Můžeme doufat, že by si ho rovnoměrně rozdělili.

Co ovšem udělají v situaci, kdy $v(C) = 50$? Hráč C se zúčastní velké koalice pouze tehdy, pokud mu poskytne zisk lepší než při jeho nekooperaci. Předpokládejme, že se hráči sejdou a dohodnou rozdělení zisku $(25, 25, 50)$ nebo ještě jistější $(24, 24, 52)$. Vidíme, že vytvoření koalice je spojeno s vyjednáváním o rozdělení budoucího zisku.

[1]Pelef, Sudholter: Introduction to the Theory of Cooperative Games

Pro vyjádření rozdělení zisku si zavedeme vektory $a \in \mathbb{R}^N$ (tak zvané *výplatní vektory*). Pod zápisem $a(S)$, kde $S \subseteq Q$ budeme rozumět

$$a(S) = \sum_{i \in S} a_i$$

Lze tušit, že pracujeme se spojitými úlohami a že tudíž prostor pro vyjednávání o rozdělení individuálního zisku bude potenciálně nekonečný. Zřejmě budeme pracovat s prostorem výplatních vektorů $X^{**}(v)$ takových, že

$$X^{**}(v) = \{a \in \mathbb{R}^N | a(Q) \leq v(Q)\}$$

Prostor $X^{**}(v)$ budeme nazývat *prostorem dosažitelných zisků* (feasible payoffs). Hráči si prostě nemohou rozdělit víc, než je hodnota velké koalice (lidově řečeno prostě víc peněz k rozdělení nemají). Je to ovšem pouze první přiblížení k hledání racionálního vyjednávacího prostoru, neboť v $X^{**}(v)$ existují takové výplatní vektory a, že $a(Q) < v(Q)$, což znamená, že by velká koalice tratila rozdíl mezi $v(Q)$ a $a(Q)$, neboť

$$a = v(Q) - \sum_{i \in Q} a_i > 0$$

Prostor dosažitelných zisků proto omezíme zdola na *prostor efektivních zisků*:

$$X^{*}(v) = \{a \in X^{**}(v) | a(Q) = v(Q)\}$$

Prostor $X^*(v)$ vyjadřuje kolektivní racionalitu koalic, které neuvažují výplatní vektory, které jim nepřináší alespoň zisk na úrovni hodnoty jejich koalice (včetně koalic jednoprvkových). Zajímá nás především individuální racionalita jedince. Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je *individuálně racionální*, pokud pro všechny $i \in Q$ platí, že:

$$a_i \geq v(\{i\})$$

Dostáváme se k definici pojmu *imputace*.

Definice 5. *Výplatní vektor $a \in \mathbb{R}^N$ je imputací ve hře $v \in G^N$, pokud je efektivní a současně individuálně racionální, t.j.:*

- $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$
- $a_i \geq v(\{i\})$ *pro všechny* $i \in Q$

Prostor všech imputací hry $v \in G^Q$ budeme označovat $X(v)$. Je zřejmé, že $X(v)$ bude prázdný pouze tehdy, pokud $v(Q) < \sum_{i \in Q} v(\{i\})$. Dále bude bude $X(v)$ jednoprvkový v aditivní hře (nepodstatné hře) a tím jediným prvkem bude

$$a = (v(1), v(2), ..., v(N))$$

2.3 Řešení kooperativních her

Budeme se nyní zabývat hledáním racionálního podprostoru imputací, který může vést k modelu rozhodnutí hráčů o utvoření velké koalice a rozdělení zisku. Budeme hledat formu ekvilibria v kooperativních hrách. Definic vyjadřujících kooperativní ekvilibrium je více, proto je budeme obecně označovat jako *návrhy řešení hry* (solution concepts).

Základní formou řešení hry je jádro hry.

Definice 6. *Jádro $C(v)$ hry $v \in G^Q$ je tvořeno množinou imputací*

$$C(v) = \left\{ a \in X(v) | \sum_{i \in Q} a_i \geq v(S); \;\; \forall S \in 2^Q \setminus \emptyset \right\}$$

Jádro hry je tedy tvořeno množinou imputací, kde žádná koalice S nemá důvod se rozložit a utvořit jinou koalici než velkou koalici. Jádro tvoří množinu akceptovatelných stabilních řešení ve hře, můžeme tedy říct ekvilibrií. Je to však velmi obecné řešení, které je obecně nekonečné. Nejlépe ho lze vyjádřit množinou lineárních nerovnic.

Jádro hry lze též vyjádřit formou preferencí hráčů nad imputacemi. Zavedeme proto pojem dominance nad imputacemi.

Definice 7. *Nechť $v \in G^Q$, S je koalice a a, b jsou imputace. Řekneme, že a dominuje nad b pro koalici S, pokud:*

- $a_i > b_i$ *pro všechny* $i \in S$
- $\sum_{i \in S} a_i \leq v(S)$

Imputace musí být jaksi shora omezená ($\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$). Preferenci budeme značit $a \succ_S b$. Můžeme následně definovat jádro hry pomocí dominance nad imputacemi.

Definice 8. *Nechť $v \in G^Q$. Jádro hry v je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro jakoukoliv koalici.*

Je-li tedy imputace a v jádru hry v, pak žádná koalice ve hře nemá tendenci koalici zrušit a nahradit imputaci a jinou imputací.

V dalším textu se budeme dále zabývat racionalitou jedince, který bude chtít vyčíslit svou hodnotu pro koalici, jíž je členem. Jedinec i bude je samozřejmě schopen odvodit rozdíl mezi hodnotou koalice s jeho přítomností a bez jeho přítomností.

Takový jedinec chápe:

- Svou vlastní hodnotu ve hře $v(\{i\})$ a tím i případný svůj individuální zisk, pokud by nekooperoval.
- Svou přidanou hodnotu $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, kterou přináší pro koalici S, kde $i \in S$.

Hráč i ovšem chce znát svou přidanou hodnotu pro všechny koalice. Hledá formu statistiky, která by mu ji jasně vyčíslila a dokonce tak, aby jeho názor o celkové jeho přidané hodnotě pro hru byl akceptován i ostatními hráči.

2.4 Shapleyho hodnota ve hře (Shapley value)

Jak již bylo řečeno, zkoumáme vliv neúčasti hráče v koalici $\delta(i, S) = v(S) - v(S \setminus \{i\})$, tedy jeho nepopiratelný přínos pro koalici. Pokud by koalice S měla být utvořena, je jisté, že hráč i by měl nárok požadovat $\delta(i, S)$. Má to pro něj pochopitelně význam pouze tehdy, pokud $\delta(i, S) \geq v(\{i\})$.

S pojmem koalice S nyní budeme pracovat obecně. Neřešíme jednu konkrétní koalici (přínos hráče i pro konrétní koalici jsme si již odvodili). Koalici S budeme sestavovat ze všech zbylých hráčů $Q \setminus \{i\}$ a požadovanou statistiku (Shapleyho hodnotu) budeme budovat postupně. Začneme u předpokladu všech koalic S takových, že $|S| = k$. Pak koalice $S \setminus \{i\}$ má $k - 1$ členů a lze vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-1-(k-1))!} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby ze všech zbylých hráčů $Q \setminus \{i\}$[2]. Zkoumáme střední hodnotu přínosu hráče i do všech možných k-členných koalic.

Přínos hráče i do všech k-členných koalic je dán:

$$h_i(k) = \sum_{S \subseteq Q, k=|S|, i \in S} \frac{v(S) - v(S \setminus \{i\})}{\binom{N-1}{k-1}}$$

Je vidět, že $h_i(k)$ je obyčejný aritmetický průměr (suma všech přínosů do všech utvořitelných koalic dělená počtem utvořitelných koalic). Výraz $h_i(k)$ dále upravíme na

$$h_i(k) = \sum_{S \subseteq Q, k=|S|, i \in S} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

Když budeme iterovat přes všechny velikosti možné koalice, pak pro všechny možné koalice dále obdržíme celkovou statistiku přínosu hráče i do hry:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{S \subseteq Q, i \in S} \frac{(|S|-1)!(N-|S|)!}{N!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{2.1}$$

[2] Snad je to jasné, ale mluvíme o kombinacích bez opakovaní

Definice 9. *Mějme $v \in G^Q$. Shapleyho vektor této hry je definován jako vektor*

$$\mathbb{H} = (H_1, H_2, ..., H_N)$$

jehož každá i-tá složka H_i je dána vztahem 2.1. Složka H_i se nazývá Shapleyho hodnota pro hráče i.

Z definice Shapleyho hodnoty je patrné, že vždy existuje (v definičním oboru funkce $H_i : G^Q \to \mathbb{R}$ není žádná hodnota, pro kterou by funkce neměla být definována).

Věta 7. *Mějme hru $v \in G^Q$. Shapleyho vektor hry v je imputací ve hře v.*

Proof. Důkaz (ověření individuální a kolektivní racionality) jako domácí cvičení. □

Příklad

Mějme hru zadanou následující hodnotící funkcí:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$v(\emptyset)$
$v(S)$	100	10	0	150	110	20	200	0

$$\begin{array}{ccc} h_1(1) = 100 & h_2(1) = 10 & h_3(1) = 0 \\ h_1(2) = \frac{140+110}{2} & h_2(2) = \frac{50+20}{2} & h_3(2) = \frac{10+10}{2} \\ h_1(3) = 180 & h_2(3) = 90 & h_3(3) = 50 \end{array}$$

Hráč 1 se může zapojit do dvou dvoučlenných koalic ($\{1,2\}, \{1,3\}$). Dle Shapleyho je jeho přínos pro dvoučlenné koalice dán

$$\frac{1}{2}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) = \frac{1}{2}(110 - 0) + \frac{1}{2}(150 - 10)$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{100+125+180}{3} = 135$, $H_2 = 45$, $H_3 = 20$.
Shapleyho vektor pro zadanou hru je $\mathbb{H} = (135, 45, 20)$.

Vlastnosti Shapleyho hodnoty

Shapleyho hodnota má následující vlastnosti:

- Individuální racionalita: $H_i \geq v(\{i\})$ pro všechny $i \in Q$. Shapleyho hodnota vyčísluje imputaci, která je přijatelná pro každého jednotlivého hráče.
- Efektivita: $\sum_{i \in Q} H_i = v(Q)$. Shapleyho hodnota rozděluje celou hodnotu velké koalice.

- Symetrie: pro každé dva hráče $i, j \in Q$, pro které platí $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$ pro všechny $K \subseteq Q, i \notin K, j \notin K$, je $H_i = H_j$. Pokud existují dva hráči $i, j \in Q$ takoví, že do libovolné koalice přinášejí stejný potenciál, pak jsou oceněni stejnou hodnotou.
- Aditivita: pokud kombinujeme dvě hry v a w stejné struktury (se stejnými hráči), pak platí, že $H_i(v)+H_i(w) = H_i(v+w)$. Je to patrné z linearity Shapleyho funkce (je to lineární zobrazení).
- Nulový hráč nebere nic: pokud existuje hráč i takový, že $v(K \cup \{i\}) = v(K), \forall K \subset Q, i \notin K$, pak je $H_i = 0$.

Co je ovšem na Shapleyho hodnotě nejvíc důležité je její unikátnost. Připomeňme, že hledáme ekvilibrium v kooperativních hrách. V předchozích kapitolách jsme definovali množinu imputací a jádro hry, tedy podmnožinu imputací, ve které každý výsledek je pro hráče stabilní a tím i ekvilibriem. Jádro má ovšem potenciálně nekonečně mnoho prvků a pouze ukazuje vyjednávací množinu, která je efektivní a individuálně racionální. Shapley svou statistikou $\mathbb{H}$ ukázal něco na způsob maxima na této množině.

2.5 Příklady kooperativních her

Uvedeme si několik základních tříd kooperativních her a jejich typické řešení.

Šéf a zaměstnanci

Následující příklad ukáže vliv jednoho konkrétního hráče (šéfa) na možnosti utvoření koalic a tedy proveditelnost kooperativní hry.

Předpokládejme situaci šéfa o a zaměstanců $w_1, w_2, ..., w_k$. Celkově je tedy ve hře $N = 1 + k$ hráčů a množina hráčů je $Q = \{o, w_1, w_2, ..., w_k\}$.

Otázkou vyjednávání je projekt, který nutně ztroskotá bez účasti šéfa, což v řeči hodnotící funkce znamená

$$v(S) = 0, \forall K \subset S, o \notin K$$

Šéf se bez zaměstnanců neobejde, proto taktéž $v(\{o\}) = 0$. Každý zaměstnanec má přínos daný svým pracovním výkonem ohodnotitelným číslem p, což značí, že koalice S tvořená šéfem a $|S| - 1$ zaměstnanci má hodnotu

$$v(S) = (|S| - 1) \cdot p, \forall S \subseteq Q, o \in S$$

Pochopitelně, podobně jako nezařazený šéf, tak i nekooperující zaměstnanec $w_i, i = 1..k$ má zisk $v(\{w_i\}) = 0$.

Ptáme se, jak si mají hráči rozdělit zisk, aby mohla vzniknout koalice s nenulovým ziskem. Zajímá nás především výplata pro šéfa. Minimální funkční koalice je $S_0 = \{o, w_i\}$ tvořená šéfem a nějakým jedním zaměstnancem $w_i, i = 1..k$. Hodnota takové koalice je ovšem pouze $v(S_0) = p$. Není důvod, aby se nepřidali ostatní zaměstnanci a dosáhlo se zisku velké koalice $v(Q) = k \cdot p$. Šéf ovšem odvodí Shapleyho hodnotu sebe a ostatních hráčů, která je:

$$H_o = \frac{(|Q| - 1) \cdot p}{2}$$

$$H_i = \frac{p}{2}; \forall i = 1..k$$

Když si pro zajímavost dosadíme za $k = 5$, tedy pět zaměstnanců firmy a přínos každého zaměstnance do projektu ve výši 10, pak dostáváme podíl na zisku pro šéfa ve výši $a_o = 25$ a pro každého zaměstnance $a_i = 5$.

Ověříme, že Shapleyho vektor je imputací – v našem případě pracujeme s imputací

$$a = \mathbb{H} = (H_i)_{i \in Q} = (25, 5, 5, 5, 5, 5)$$

Aby byl, musí platit efektivita a individuální racionalita. Pro efektivitu je nutné, aby dělení zisku v sumě odpovídalo zisku velké koalice, tedy $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$, což evidentně platí, neboť se rozděluje zisk ve výši 50 a ten odpovídá hodnotě koalice zadané na počátku. Individuální racionalita jistě také platí, protože absolutně každý ve hře cítí, že $v(\{i\}) = 0$, tedy platí pro všechny $a_i \geq v(\{i\})$.

Na závěr tohoto příkladu poznamenejme, že tato situace je hodně ze života a dokonce je vidět, že zisk šéfa roste přímo s počtem jeho zaměstnanců, kdežto zisk zaměstnance zůstává nezměněn bez ohledu na to, kolik tato naše komunita vytvoří celkové hodnoty. Sílou jedince v takových situacích se budeme ještě zabývat v Teorii veřejné volby, kde budeme zkoumat tak zvaný power-index hráče, nebo-li jeho individuální moc.

Stavba mostu

Stavba veřejného zařízení je klasickou ukázkou tak zvaných cost-allocation games nebo také spořících her. Obecně vždy musí hráči vytvořit nadkritickou koalici takovou, aby svou silou byla schopna realizovat společnou stavbu. Hráči ovšem stále plánují ve hře zisk.

Čtyři firmy zvažují postavit most. Cena mostu je $C = 20$ miliónů. Jednotlivé firmy jsou ochotny zaplatit maximálně $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$, $u_4 = 16$ miliónů jako podíl do stavby. Můžeme si to představit jako hraniční hodnotu, kdy je projekt ještě pro firmu zajímavý. Rozdíl mezi maximální zaplatitelnou částkou a finální platbou tvoří zisk hráče ve hře.

Které firmy se dohodnou na stavbě mostu a kolik každá zaplatí? Firmy utvoří akční koalici (pro stavbu mostu) pouze za předpokladu, že se dohodnou na platbě.

Pozn.: Podobné úlohy řeší *mechanism design* v situacích, kdy chtějí hráči svoje ocenění u_i tajit. Je pak třeba *nastavit pravidla*, aby to v rámci racionálního chování dobrovolně přiznali.

Tedy

$$u_1 = 10, u_2 = 8, u_3 = 12, u_4 = 16$$

Hra je dána charakteristickou funkcí, která vyjadřuje celkovou úsporu koalice:

$$v(S) = \max\left[\sum_{i \in S} u_i - C, 0\right]$$

Pokud má koalice nadkritickou hodnotu a je schopna most postavit, pak je její zisk nezáporný. Pokud není schopna most postavit, stavba se nekoná a hra končí pro hráče neutrálně.

Zřejmě dále platí $v(\{i\}) = 0$ pro všechny $i \in Q$. Snadno zjistíme, že hodnota velké koalice je

$$v(Q) = (10 + 8 + 12 + 16) - 20 = 26$$

Pro hráče bude nejspíš nejlepší, pokud se do stavby zapojí všichni. Zbývá jim jenom dohodnout spravedlivé podíly na stavebních nákladech. Budeme předpokládat, že hráči netají své pravdivé ohodnocení mostu (k tomu se dostaneme v kapitole o Mechanism design, kdy budeme hledat taková pravidla komunikace, aby hráči neměli snahu zakrývat své u_i). Proto jsou schopni všichni odvodit přínos jednotlivce pro velkou koalici, takže se opět dostáváme k Shapleyho hodnotě.

Shapleyho hodnota ve hře je $\mathbb{H} = (5.667, 4.333, 6.667, 9.333)$. Shapleyho hodnota hráče i vyjadřuje úsporu, kterou hráč přinese celku, pokud se do realizační koalice zapojí.

Pokud tedy hráči mají právo žádat výplatu H_i, pak do stavby musí vložit

$$p_i = u_i - H_i$$

tedy $p = \left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, \frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right)$. Celkem je to $\frac{13}{3} + \frac{11}{3} + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 20$, tedy stavební náklady jsou pokryty, most se postaví a každý hráč i zaznamená užitek ve výši $u_i - p_i$.

Pokud ovšem hru posuneme o úroveň výše, můžeme pojmout prezentované ohodnocení stavby u_i hráči jako jejich strategie v rozhodování. Pokud by totiž hráč 1 nepravdivě prezentoval namísto ohodnocení 10 hodnotu 5, dával by tím najevo menší zájem o stavbu a jeho H_1 by bylo nižší, řekněme 3.57. Zaplatil by pak podíl na stavbě $p_1 = 5 - 3.57 = 1.43$, což by u něj vedlo k pravdivému užitku $10 - 1.43$, kter7 je rozhodně vyšší než při platbě $10 - 5.667$. Pokud bychom předpokládali takové chování, stavba by se nejspíš nerealizovala. Studium těchto problémů bude následovat v kapitole o Mechanism design. Cílem této úvahy bylo prezentovat křehkost kooperativity v reálných situacích.

2.6 Nukleolus

Zavedli jsme pojem imputace a pojem jádra hry, které modeluje pro hráče akceptovatelné výsledky hry. V této kapitole budeme dál hledat spravedlivý výplatní vektor pro hráče hry.

Definice 10. *Nechť $v \in G^Q$, a je daná imputace a $S \subseteq Q$ je koalice. Číslo*

$$e(S,a) = v(S) - \sum_{i \in S} a_i$$

se nazývá exces koalice S vzhledem k imputaci a.

Exces koalice S vzhledem k imputaci vyjadřuje kolik musí koalice zanechat nerozděleno při imputaci a. Připomeňme, že imputace a musí být efektivní, což znamená, že $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$. Všimněme si tedy, že to nutně neznamená $\sum_{i \in S} a_i = v(S)$.

Dále označme symbolem $e(a)$ vektor o délce $2^{|Q|} - 1$ odpovídající excesům všech možných koalic. Berme to jako formu statistiky, která vyčísluje ztrátu při hraní imputace a pro veškeré myslitelné koalice $\{1\}, \{2\}, ..., \{N\}, \{1,2\}, ..., \{1,N\}, ..., Q$.

Seřaďme prvky $e(a)$ sestupně podle velikosti a označme tuto posloupnost symbolem $f(a)$. Je-li tedy $e(a)$ posloupností čísel, kde každý prvek ohodnocuje míru ztráty nějaké z koalic a $|e(a)| = 2^N - 1$, pak stějně tak $f(a)$ je posloupností čísel stejného charakteru, ovšem seřazených sestupně. Nemusíme tudíž zkoumat, jaká pozice v posloupnosti přísluší jaké koalici a známe prostě jenom míru protestů všech hráčů vůči dané imputaci a. Nyní budeme hledat způsob, jak porovnávat dvě imputace z hlediska jejich $f(\cdot)$. Vyjádřit nelibost vůči imputaci a pouhým jedním číslem $\sum_{j=1..2^N-1} e(a)$ by asi nestačilo.

Každé imputaci $a \in X(v)$ ve hře $v \in G^Q$ se tak přiřadí statistika $f(a)$. Pracujeme s množinou

$$F(v) = \{f(a) | a \in X(v)\}$$

Definujme na této množině $F(v)$ lexikografické uspořádání $\leq_{(lex)}$ rekurzivním zápisem takto (kde funkce $head(p)$ vrací první prvek posloupnosti a funkce $tail(p)$ vrací posloupnost bez prvního prvku):

$$\leq_{(lex)} (p_1, p_2) = \begin{cases} true & p_1 = p_2 = () \\ \leq_{(lex)} (tail(p_1), tail(p_2)) & head(p_1) \leq head(p_2) \\ false & otherwise \end{cases}$$

Řekneme, že imputace b je přijatelnější (vzbuzuje méně námitek) než imputace a, pokud $f(b) \leq_{(lex)} f(a)$. Jinak řečeno, po celé délce posloupnosti b platí, že prvek na dané pozici je menší nebo roven prvku na dané pozici v posloupnosti a.

Znamená to, že imputace b ve všech myslitelných koalicích vede k lepšímu rozložení zisku.

Definice 11. *Mějme hru $v \in G^Q$. Nucleolem hry v je taková imputace $b \in X(v)$, pro kterou platí:*

$$f(b) \leq_{(lex)} f(a)$$

pro všechny imputace $a \in X(v)$.

Vidíme, že nukleolus je forma globálního optima ve hře (stabilní bod).

Demonstrační příklad

Mějme hru s char. funkcí: $v(Q) = 1, v(\{1\}) = \frac{1}{2}, v(\{2\}) = 0$. První hráč má tedy garantovaný výsledek ve výši $\frac{1}{2}$. Pokud se spojí do koalice s druhým hráčem, má druhý hráč naději na nenulový výsledek a první na výsledek v intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$.

Nejdříve si uvědomíme, že množina imputací ve hře je nekonečná a je dána lineárními nerovnicemi:

$$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0$$

které vyjadřují individuální racionalitu a rovnicí vyjadřující efektivitu výsledku:

$$a_1 + a_2 = 1$$

Vyjednávací prostor pro rozdělení zisku je tedy analyticky určen jako:

$$a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, a_2 = 1 - a_1$$

Pokud bychom k situaci přistoupili jako k nekooperativní hře, pak se nabízí podobnost s ultimatum game, kde by podle Nashe měl druhý hráč přistoupit na kterékoliv rozdělení, které by mu přineslo nenulový výsledek, to znamená například na imputaci $(0.99, 0.01)$. V kooperativních hrách si však již dokážeme představit, že první hráč má také zájem na zisku v pásmu nad jeho disagreement value. Proto předpokládáme snahu prvního hráče nabídnout druhému rozumné rozdělení zisku takové, aby došlo k ustanovení velké koalice.

Jádro hry pouze potvrzuje, že všechny imputace hry jsou pro hráče akceptovatelné.

$$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, a_2 = 1 - a_1$$

Viděno optikou Shapleyho hodnoty zjišťujeme, že první hráč zvyšuje hodnotu velké koalice z nuly na jedna a sám pro sebe má hodnotu jedné poloviny. Proto je

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}$$

Druhý hráč je přinosem pro velkou koalici pouze do hodnoty jedné poloviny, neboť bez jeho účasti je $v(\{1\}) = \frac{1}{2}$.

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Proto se hráči mohou dohodnout na rozdělení podle Shapleyho hodnoty a tedy

$$a^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Není to až tak překvapující, neboť předpokládáme oba hráče symetrické z hlediska užitku ve hře a rozdělujeme z koláče $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Použijeme nyní solution concept definovaný jako nukleolus. Připomínáme, že exces koalice S vzhledem k imputaci a je:

$$e(S, a) = v(S) - \sum_{i \in S} a_i$$

Pak, vyjádřeno analyticky pro imputaci a:

Exces pro jednoprvkovou koalici hráče 1 je $e(\{1\}, a) = \frac{1}{2} - a_1$, tedy jeho nejhorší ztráta může být nula. Pro hráče dva je cokoliv nenulového přínosem (kladný exces značí ztrátu): $e(\{2\}, a) = 0 - a_2$. Velká koalice nemá výhrady k žádnému rozdělení, naboť $e(\{1, 2\}, a) = 1 - a_1 - a_2 = 1 - a_1 - (1 - a_1) = 0$.

Exces tedy zapíšeme analyticky jako (a dále pak s předpokladem $a_1 = 1 - a_2$):

$$e(a) = \left(\frac{1}{2} - a_1, -a_2, 0\right) = \left(a_2 - \frac{1}{2}, -a_2, 0\right)$$

Excesy budeme zkoumat pro prahovou hodnotu $a_2 = \frac{1}{4}$, kde očekáváme zajímavý vývoj:

$$f(a) = (0, -a_2, a_2 - \frac{1}{2}) \Leftrightarrow 0 \leq a_2 \leq \frac{1}{4}$$

$$f(a) = (0, a_2 - \frac{1}{2}, -a_2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq a_2 \leq 1$$

Pokud dáme $a_2 = 0$, pak je exces $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Pokud dáme $a_2 = \frac{1}{4}$, pak je exces $\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Vidíme, že $\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \leq_{(lex)} \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

Co dát $a_2 = \frac{1}{2}$?

Nejpřijatelnější exces je při $a_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$.