Doprovodné texty ke kurzu Teorie her

Martin Hrubý
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

zimní semestr, akad. rok 2010/11

Contents

Chapter 1

Mechanism design

Do tohoto okamžiku jsme měli možnost studovat modely herních situací, které se řídily nějakými předem známými pravidly. Prošli jsme nekooperativní hry všech forem, vyjednávání a kooperativní hry. V Mechanism designu se celá úloha otočí. Cílem Mechanism designu (česky snad Návrhu pravidel) bude navrhnout pravidla situace, ve které se posléze budou pohybovat strategičtí hráči sledující vlastní cíle. Pravidla budeme navrhovat s ohledem na to, aby se hráči chovali vlivem vlastní racionality tak, jak si přejeme, aby se chovali. Typicky budeme požadovat, aby hráči byli racionalitou nuceni nám sdělit své tajné preference týkající se věci, o kterou se hraje.

Mechanism design je velmi široký pojem zasahující do oblasti ekonomie, sociálních věd, ale i informatiky. Zejména řeší problémy:

- Ekonomických mechanismů všech forem – trhů, výběrových řízení, ...
- Elektronických forem obchodování.
- Aukcí.
- Veřejných rozhodnutí, například volebních mechanismů.

V THE se zaměříme na oblast Teorie veřejné volby (Social/Public choice) a Teorie aukcí (Auction theory).

Chapter 2

Teorie veřejné volby

Teorie veřejné volby se netýká pouze volebních mechanismů do různých veřejných funkcí (prezident, předseda, zastupitel, parlamentní poslanec). Věc volby vnímá obecně jako rozhodnutí o zvolení alternativy a z množiny možných alternativ A, která je společností – tedy množinou voličů – vnímána jako veřejně a společensky optimální volba.

Společnost zde vystupuje jako (obvykle konečná) množina voličů Q, kde jednoho z voličů budeme tradičně označovat i. Každý volič vždy, jako každý racionální hráč, sleduje svoje individuální preference a tím i svou individuální racionalitu. Pokud je společností voličů zvolena jeho preferovaná alternativa, cítí z toho jakýsi užitek. Cílem voliče je tedy dosáhnout stavu, kdy společnost bude preferovat (zvolí) jeho preferovanou alternativu.

2.1 Většinová volba a preference voliče

Představme si situaci, kdy množina voličů stojí před problémem společné volby jedné alternativy z množiny A. Tím problémem je zvolit mechanický postup takový, aby zvolená alternativa odpovídala skutečným preferencím společnosti. Jinak řečeno, otázkou je jak ty volby provést.

Tradiční metodou (mechanismem) je *většinová volba*. Voliči zvolí svou alternativu a tu ohlásí nezávislému arbitrovi ve formě svého hlasu. Arbitr sečte hlasy pro jednotlivé alternativy a ohlásí alternativu $a^* \in A$, která získala nejvíce hlasů.

Zkoumejme tuto situaci nejprve s dvěma alternativami, tzn. $|A| = 2$. Volby mohou skončit jasnou většinou pro jednu alternativu nebo nerozhodně (počty hlasů pro alternativy se rovnají). Jasná většina vede k jasné volbě a mechanismus většinové volby je pak ideálním volebním mechanisme. Problém může nastat, pokud volby skončí nerozhodně. Myšlenka volby zopakovat nevede ke koncepčnímu řešení, neboť nemůžeme očekávat, že na druhé kolo voliči změní své preference. Je nutno se vyrovnat s faktem, že **volby vždy nemusí skončit jednoznačným výsledkem**.

Mějme následující příklad na obrázku 2.1. Tabulka na obrázku prezentuje preference tří voličů $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ nad alternativami J, K, L. Volič i_1 má tedy preference $J \succ_i K \succ_i L$. Při většinové volbě zvítězí alternativa J.

Preference/Voliči:	i_1	i_2	i_3
1.	J	J	K
2.	K	L	L
3.	L	K	J

Figure 2.1: Ukázka preferencí voličů ve volbách

S počtem alternativ (kandidátů) se pravděpodobnost na nerozhodnost výsledku zvyšuje. Navíc s výsledkem vznikají i protesty těch voličů, jejichž alternativa není vybrána ve většinové volbě. Mějme 100 voličů a tři alternativy se ziskem hlasů $a = 40$, $b = 32$ a $c = 28$. Proč by měla být zvolena alternativa a, když si ji 60 voličů (tedy většina) nepřeje?!

Můžeme systém voleb vylepšit duely alternativ jako při fotbalovém šampionátu. Tím zdánlivě převedeme problém volby mezi více alternativami na problém volby mezi dvěma alternativami. Voličům bude položena otázka, zda-li preferují a nebo b. Voličům alternativ a a b bude otázka jasná, jak ovšem na ni zareagují voliči alternativy c?

Připomeňme základní předpoklad pro smysluplnost preference hráče: **preferenční relace musí být úplná a tranzitivní**. Voliči alternativy c musí mít tedy názor na preferenci mezi a a b. Vzniká tak preferenční relace každého voliče.

Notace pro teorii veřejné volby

Zavedli jsme množinu alternativ A a množinu voličů Q. Nyní zavedeme preferenční relaci nad alternativami – tato je z principu věci obecně **odlišná pro každého voliče**.

Relace slabé preference voliče i nad množinou alternativ A nechť je úplná, tranzitivní a reflexivní relace $\succeq_i \subseteq A \times A$. Z relace slabé preference plyne i obvyklá formulace striktní (ostré) preference $\succ_i$. Nové pro nás budou relace zohledňující preferenci **celé společnosti** – $\succeq$ a $\succ$ (tedy bez dolního indexu i označujícího hráče).

2.2 Úloha volebních mechanismů

Při zkoumání volebních mechanismů nás bude zajímat jednak problém zvolení alternativy a pak především problém sestavení celkové preference společnosti.

Od počátku předpokládáme, že cílem společnosti je zvolit alternativu, která je pro společnost jaksi přínosná a preferovaná většinou. V Teorii veřejné volby proti sobě stojí preference jedince (a jeho individuální užitek) a preference společnosti a s tím související veřejné blaho. Budeme předpokládat, že společnost chce volbou mechanismu voleb zajistit, aby byly volby spravedlivé a bez možnosti je manipulovat jedinci, kteří s větším důrazem prosazují svůj individuální záměr. Stále předpokládáme, že každý volič $i \in Q$ má jediný způsob chování a tím je prezentace své individuální preference $\succeq_i$. Právě prezentací individuální preference může volič volby manipulovat, jak později uvidíme.

2.3 Condorcetův paradox

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (markýz de Condorcet, 1743–1794) byl francouzský filosof a matematik. Zabýval se volebními mechanismy a jako první poukázal na koncepční nedostatek většinové volby (není odolná proti porušení tranzitivity).

Jak proběhne volba v situaci zobrazené na obrázku 2.2? Řekneme, že vítěz by měl být schopen zvítězit v duelu s každým protikandidátem. Tady jsou tedy ty duely:

- Duel J:K (vítěz J, dva hlasy), tzn. celek $J \succ K$
- Duel J:L (vítěz L, dva hlasy), tzn. celek $L \succ J$
- Duel K:L (vítěz K, dva hlasy), tzn. celek $K \succ L$

V prvním kole zvítězí J, v druhém kole (J versus L) zvítězí L. Je tedy L vítězem voleb? Alternativa L zvítězila nad oběma protikandidáty, přesto toto platí i opačně. Vítěze tedy nevidíme, ke všemu je zmatek v celkové preferenci voličů: $J \succ K \succ L \succ J$.

Condorcet definoval vítěze (tzv. Condorcetův vítěz) jako alternativu X s tou vlastností, že pro každou alternativu Y je počet voličů preferujících X před Y větší, než počet voličů preferujících Y před X. Z principu tohoto mechanismu však Condorcetův vítěz nemusí vždy existovat, tzn. volby mohou skončit patem.

2.4 Strategická manipulace volebních mechanismů

Na obrázku 2.2 je zobrazena jiná volební situace. Situace vede zřejmě k patovému výsledku voleb, neboť žádná alternativa nezvítězí v duelech nad všemi zbývajícími. Pokud si například hráč 3 tuto situaci uvědomí, může do voleb zasáhnout manipulací své preference. Vycházíme z jeho pravdivé preference $K \succ_i L \succ_i J$, ze které je vidět, že se může obávat zvolení alternativy J, jeho preferovaná alternativa K není ve společnosti dostatečně preferovaná, ale L je stále lepší než J. Když tento strategický hráč společnosti bude prezentovat svou preferenci strategicky zmanipulovanou, tzn. $L \succ_i K \succ_i J$, dosáhne zvolení alternativy L, která je pro něj stále ještě přípustná. Tento postup je však společností považován za špatný.

Preference/Voliči:	i_1	i_2	i_3
1.	J	L	K
2.	K	J	L
3.	L	K	J

Figure 2.2: Ukázka preferencí voličů ve volbách II.

2.5 Mechanismus Borda count

Jean Charles de Borda (1733 – 1799) kritizoval volební mechanismy ve Francouzské akademii podobně jako Condorcet. Navrhl rozdělit "body" kandidátům: každý volič přidělí $|A|$ svému prvnímu kandidátovi, $|A|-1$ druhému, ..., jeden poslednímu. Vítěz je kandidát s nejvyšší sumou bodů. Zdá se to jako ideální metoda. Mnohdy vede k řešení, je ovšem strategicky manipulovatelná.

Condorcetova metoda tudíž může porušovat tranzitivitu a Bordova metoda porušuje nemanipulovatelnost.

2.6 Formální zavedení volebních situací

Nechť A je množina alternativ. Budeme formalizovat obor hodnot všech možných preferencí.

Definice 1. *Mějme množinu alternativ A. Množina $\mathcal{R}$ obsahuje všechna možná uspořádání na množině A (je izomorfní s permutacemi na A).*

Množina $\mathcal{R}$ je principem totožná s S_i ve strategických hrách. Strategií hráče-voliče je volba jeho preference, kterou bude společnosti prezentovat. Pochopitelně, jedna z nich je ta jeho pravdivá preference a zbylé jsou možné manipulace. Podobně $\mathcal{R}^N$ je principem totožná s množinou strategických profilů S ve strategických hrách. Tudíž potřebujeme zavést pojem profil preferencí:

Definice 2. *Mějme množinu alternativ A a n voličů. Profilem ρ uspořádání preferencí budeme rozumět uspořádanou n-tici*

$$\rho = (R^1, R^2, ..., R^n) \in \mathcal{R}^n$$

Jeden profil ρ reprezentuje jednu možnou situaci, která může u voleb nastat. Je to vektor konkrétních prezentovaných preferencí voličů. V následujícím odstavci zavedeme formálně funkci, která na zadaný profil sestaví společenskou preferenci nad alternativami.

2.7 Funkce společenského blahobytu (Social welfare function)

Jádrem volebních mechanismů je tak zvaná funkce společenského blahobytu. V literatuře se objevuje také pod názvem Social Agregation Function nebo Preference Agregation Rule. Tato funkce je matematickým modelem volebního mechanismu – je to program, který na zadaný vstupní profil preferencí voličů vyhodnotí, jaká je celková preference společnosti. My budeme tuto funkci zkoumat jako modelového představitele volebního mechanismu. Především budeme zkoumat její vlastnosti a tedy i vlastnosti volebního mechanismu, které u spravedlivých voleb očekáváme.

Definice 3. *Funkcí společenského blahobytu (social welfare function) budeme rozumět funkci*

$$F : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$$

Funkce F je mechanickým arbitrem (řídí se pravidly), která na zadané preference voličů sestaví preferenci celé společnosti (základ pro volbu optima). Následující čtyři podmínky (tranzitivita, nediktátorství, pareto optimalita a nezávislost na irelevantních alternativách) jsou ideálem spravedlivých voleb, tedy čtyři vlastnosti, které u funkce společenského blahobytu očekáváme. V následujícím textu především dokážeme (Arrow's Impossibility Theorem), že nemůže obecně existovat funkce společenského blahobytu taková, aby pro všechny myslitelné $\rho \in \mathcal{R}^n$ tyto podmínky splňovala.

2.7.1 Podmínka tranzitivity

Definice 4. *Funkce společenského blahobytu F je tranzitivní, je-li $F(\rho)$ tranzitivní pro všechny $\rho \in \mathcal{R}^N$.*

Tranzitivitu považujeme za minimální projev logiky rozhodování (např. pro nalezení maxima). Arbitr voleb (tj. funkce společenského blahobytu) musí být schopen sestavit tranzitivní společenskou preferenci ve všech možných situacích preferencí jednotlivců. Víme již z Condorcetova paradoxu, že to není až tak garantováno.

2.7.2 Podmínka nediktátorství

Definice 5. *Funkce společenského blahobytu F je nediktátorská, pokud neexistuje $i \in Q$ takový, že pro všechny $\rho \in \mathcal{R}^N$ a každé dvě alternativy $x, y \in A$ platí, že pokud $x \succ_i y$, pak $x \succ y$.*

Tato podmínka ukládá, aby žádný hráč i nezpůsobil svou preferencí preferenci celku, bez ohledu na to, co si přeje celek. Zatím nemluvíme o strategické manipulaci (tj. předkládání nepravdivé preference). Uvidíme, že s touto podmínkou je zásadní problém. Navíc, diktátorem není rozuměn "zlý člověk" – prostě jsou situace, kdy rozhodnutí závisí na jednotlivci[1].

2.7.3 Podmínka Pareto optimality

Definice 6. *Funkce společenského blahobytu F je slabě Pareto optimální, pokud $x \succ_i y$ pro všechny $i \in Q$ způsobí, že $x \succ y$ pro libovolné $x, y \in A$.*

[1] S tímto souvisí pojem volební moci/síly (angl. Voting power)

Tato podmínka je velmi přímočará: pokud si každý zvlášť preferuje x před y, pak i celek preferuje x před y. Existuje ještě striktně Paretovská optimalita v teorii veřejné volby, podmínka je ovšem značně silnější (možno dostudovat). Tzn., slabě/silně Paretovská optimalita v tomto případě nesouvisí se slabostí/striktností preference.

S podmínkou Pareto optimality bude také problém, neboť v důkazu Arrowova theoremu ukážeme, že může nastat situace, že celá společnost nebude schopna rozhodnout (zvolit) žádnou z alternativ.

2.7.4 Podmínka Nezávislosti na irelevantních alternativách (IIA)

Independence of irrelevant alternatives (IIA) je přítomna ve všech částech THE posuzujících preference. Formálně je definovaná:

Definice 7. *Funkce společenského blahobytu F je nezávislá na irelevantních alternativách, pokud platí pro libovolné $x, y \in A$ a libovolné dva profily $\rho, \rho' \in \mathcal{R}^N$, že $x \succeq_i y \Leftrightarrow x \succeq_i' y$ pro všechny $i \in Q$ implikuje $x \succeq y \Leftrightarrow x \succeq' y$.*

Máme dva pohledy na věc: $\rho, \rho' \in \mathcal{R}^N$, pokud v obou všichni hráči preferují x před y, pak i celek musí v obou případech preferovat x před y. Jinak řečeno, pokud v obou profilech mají hráči stejný názor na preferenci na $\{x, y\}$, měly by být obě výsledné společenské preference konzistentní v otázce preference mezi $\{x, y\}$. Také lze tuto podmínku vyložit tak, že vznik nebo zánik alternativy c (která se pochopitelně zařadí někam do preferenčního seřazení preferencí) nemůže ovlivnit preferenci mezi a a b, tzn. pokud byla $a \succ b$, pak zavedením alternativy c se nesmí $a \succ b$ změnit na $b \succ a$.

Demonstrace porušení IIA

Uvažujme Borda count jako volební mechanismus (tedy specifikaci funkce společenského blahobytu), který způsobí následující výsledky voleb daných situací na obrázku 2.3: A – 11 bodů, D – 8 bodů, tedy především $A \succ D$.

	V	W	X	Y	Z
1.	A	A	B	B	C
2.	B	C	C	C	B
3.	C	B	D	D	D
4.	D	D	A	A	A

Figure 2.3: Příklad porušení IIA-I

Omezíme-li se pouze na alternativy $\{A, D\}$, pak podle obrázku 2.4 dostáváme výsledky: A – 7 bodů, D – 8 bodů, tedy $D \succ A$. Alternativy $\{B, C\}$ jsou zde chápány z pohledu $\{A, D\}$ jako irelevantní, přesto jejich nepřítomnost způsobí změnu výsledné společenské preference.

	V	W	X	Y	Z
1.	A	A	D	D	D
2.	D	D	A	A	A

Figure 2.4: Příklad porušení IIA-I

2.8 Arrow's paradox

Theorém Kennetha Arrowa nazývaný Arrow's paradox nebo také Arrow's impossibility theorem je vnímán jako nejvýznamnější výsledek ve společenských vědách. Říká, že při třech a více alternativách nelze najít společenskou funkci blahobytu takovou, aby obecně pro všechny možné preferenční profily zachovávala čtyři výše popsané podmínky pro spravedlivou volbu. Jako důsledek musíme přijmout fakt, že jedna z těchto podmínek bude vždy porušena a skoro si můžeme vybrat, která to bude.

Věta 1 (Arrow's paradox (Arrow's impossibility theorem))**.** *Je-li A konečná množina alternativ s alespoň třemi alternativami, pak neexistuje společenská agregační funkce $F : \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$, která je tranzitivní, nediktátorská, slabě Pareto optimální a nezávislá na irelevantních alternativách.*

Existuje několik ekvivalentních formulací Arrowova theoremu a stejně tak několik jeho důkazů. Předvedeme si důkaz založený na zkoumání množiny *rozhodující* uspořádanou dvojici (x, y).

Definice 8. *Pro funkci společenského blahobytu F, je množina/podmnožina $W \subset Q$:*

- *semi-rozhodující dvojici (x, y), platí-li $x \succ y$ pro všechny $\rho \in \mathcal{R}^N$, kde $x \succ_i y; \forall i \in W$ a $y \succ_j x; \forall j \in Q \setminus W$.*
- *rozhodující dvojici (x, y), platí-li $x \succ y$ pro všechny $\rho \in \mathcal{R}^N$, kde $x \succ_i y; \forall i \in W$*
- *rozhodující, pokud je rozhodující dvojici (x, y) pro všechny $x, y \in A$.*

Jednoduše řečeno, rozhodnout x proti y znamená způsobit, že celá společnost preferuje x proti y. Základ rozhodování dvou alternativ leží v semi-rozhodující množině $W \subset Q$ pro x proti y (všimněmi si, že zbytek společnost preferuje pravý opak):

$$(\forall i \in W : x \succ_i y \wedge \forall j \in Q \setminus W : y \succ_j x) \Rightarrow x \succ y$$

Lemma 2. *Je-li F tranzitivní funkce společenského blahobytu, která je slabě Paretovská a IIA, pak $W \subset Q$ je rozhodující, pokud je W semi-rozhodující dvojici (x, y) pro některá $x, y \in A$.*

Plyne z toho, že pokud je nějaká skupina voličů semi-rozhodující pro nějaký pár alternativ (x,y), pak je skupina rozhodující. Pro funkce F, které jsou slabě Paretovské a IIA, skupina, která semi-rozhoduje nějaké (x,y), **rozhoduje nad všemi alternativami**. Dále z toho plyne, že **buď skupina rozhoduje vše nebo nerozhoduje vůbec nic**. Z definice, W musí být maximální.

Ukážeme, že buď je jednočlenná skupina rozhodující (tzn. porušíme nediktátorství) nebo je celá společnost nerozhodující (a tím porušíme podmínku slabé Paretovskosti). Celkově vzato ukážeme, že stanovené podmínky jsou vzájemně neslučitelné.

Je velmi důležité znovu zdůraznit, že zkoumáme celý prostor $\mathcal{R}^N$ a všechny možné F. Tzn., důkaz založíme na situaci, kterou lze považovat za hypotetickou.

Důkaz Arrowova paradoxu. Předpokládejme konečnou množinu alternativ A, kde $|A| \geq 3$. Pro potřeby *sporu* předpokládejme, že F je tranzitivní, nediktátorská, slabě Paretovská a IIA (najdeme libovolný případ, kdy to neplatí a tím prokážeme spor s předpokladem).

Z předchozího lemma plyne, že každá skupina $W \subset Q$ je buď rozhodující nebo nerozhoduje žádné (x, y).

Předpokládejme dvě disjunktní množiny (prázdný průnik) $J, K \subset Q$, které nejsou semi-rozhodující pro libovolné x,y (a tím nerozhodují vůbec). Nechť $L = Q \setminus (J \cup K)$. Protože $N > 2$ a neexistuje singleton (jednoprvková množina) $\{i\}$, která by byla rozhodující, pak J,K,L mohou existovat.

Dále předpokládejme profil $\rho^- \in \mathcal{R}^N$ takový, že:

$$\begin{aligned} x \succ_i^- y \succ_i^- z \quad & \forall i \in J \\ z \succ_j^- x \succ_j^- y \quad & \forall j \in K \\ y \succ_t^- z \succ_t^- x \quad & \forall t \in L \end{aligned}$$

Protože J a K jsou ne-semi-rozhodující pro jakýkoliv pár, plyne z toho celkově $z \succeq^- x$ a $y \succeq^- z$. Pokud je F opravdu tranzitivní, znamená to navíc $y \succeq^- x$.

Z toho plyne, že skupina $J \cup K$ je ne-semi-rozhodující pro (x, y), a tím že $J \cup K$ je celkově nerozhodující. Sjednocení dvou nerozhodujících skupin tvoří tedy opět nerozhodující množinu.

Z předpokladu nediktátorství plyne, že žádná singleton skupina nemůže být rozhodující.

Závěrem tedy žádná skupina voličů voličů (včetně Q) nemůže být rozhodující a to porušuje předpoklad slabé Paretovskosti.

□

Našli jsme hypotetickou konfiguraci, kdy může nastat, že celá skupina Q může být ne-semi-rozhodující jeden pár alternativ, což implikuje, že nerozhodne nic. Jiné teorémy zjemňují Arrowův paradox zavedením omezení, která vylučují takové blokující situace. Existují formulace důkazu Arrow's Impossibility Theoremu, které prokáží existenci diktátora.

2.9 Funkce veřejné volby

Zatím jsme konstruovali funkci, která vytvářela kolektivní preferenci. Zjednodušíme problém na volbu jednoho vítěze (už nebudeme potřebovat konstruovat kompletní preferenci).

Definice 9. *Funkce veřejné volby* $G : \mathcal{R}^N \rightarrow A$ *zobrazuje dané preferenční profily na množinu alternativ.*

Funkce G je funkce na množinu, tzn. každá volba $a \in A$ má preferenční profil, který vede na a.

Definice 10. $G(\rho)$ *je manipulovatelná v profilu* ρ*, pokud pro některého* $i \in Q$ *existuje profil* $\rho' = (R_1, ..., R_{i-1}, R'_i, R_{i+1}, ...)$ *takový, že* $G(\rho') \succ_i G(\rho)$*. G je nemanipulovatelná (incentive compatible), pokud není manipulovatelná ve všech* $\rho \in \mathcal{R}^N$.

Funkce veřejné volby je tedy manipulovatelná, pokud některý hráč i může změnou prezentace své preference z R_i na R'_i dosáhnout výsledku, který preferuje (což je v definici výše popsáno jako $G(\rho') \succ_i G(\rho)$).

Stále to berme tak, že preference hráče je jeho strategie a profil je strategický profil. Užitek hráče je dán umístěním vítěze v hráčově preferenci. Pokud hráč dokáže změnou své strategie posunout svého preferovaného kandidáta výše k výhře, zvyšuje svůj užitek.

2.9.1 Gibbard-Satterthwaitův teorém

Definice 11. *Volič* i *je diktátor v rámci G, jestliže pro všechny* $\rho \in \mathcal{R}^N$ *a* $\forall b \in A : b \neq a : a \succ_i b \Rightarrow G(\rho) = a$*. G se nazývá diktatura, pokud existuje* i *takový, že je diktátor.*

Zatím jsme uvažovali manipulovatelnost, což je slabší vlastnost než diktátorství. U manipulovatelnosti musel existovat profil ρ' takový, že hráč v rámci tohoto profilu mohl manipulovat. Vedle toho, diktátor prosadí $a \in A$ v každém profilu ρ.

Věta 3 (Gibbard-Satterthwaitův teorém)**.** *Pokud existují tři a více alternativy, a G je nemanipulovatelná, pak existuje diktátor.*

Co z toho plyne? Můžeme zajistit, aby G byla odolná proti strategické manipulaci, diktátor se však stejně projeví.

Zjednodušeně důkaz tvrzení: Máme množinu alternativ A. Pak můžeme sestrojit tranzitivní a IIA funkci veřejné volby, která zvolí vítěze $v_1 = G(A)$. V dalším kole ubereme z A prvek v_1 a hledáme $v_2 = G(A \setminus \{v_1\})$ a tak dál. Vytvoříme tedy preferenční uspořádání $v_1 \succ v_2 \succ ...$, které je ovšem slabě Paretovské.

Dostali jsme se tak k vytvoření společenské preference (funkce společenského blahobytu) a z Arrowova teorému plyne, že proces musel ovlivnit diktátor.

Chapter 3

Teorie aukcí

Aukce (česky též dražba) je forma zobchodování hmotného nebo nehmotného objektu (např. licence), ve kterém se potká typicky jeden prodávající s typicky více kupujícími, cena předmětu zobchodování není předem známa a má být výsledkem interakce mezi kupujícími.

Lze předpokládát, že aukce známe z běžného života v podobě veřejného setkání kupujících a prodeje nějakého uměleckého předmětu. V těchto filmových aukcích může vzniknout u pozorovatele dojem, že hlavním cílem kupujících je získat předmět aukce – v některých případech téměř za libovolnou cenu. V běžných aukcích to tak samozřejmě není – kupující je strategický hráč jako každý jiný, sleduje svou individuální racionalitu a tou je maximalizace jeho užitku. V podobné situaci je i prodávající, který má zájem na maximálním výnosu z aukce. Situaci si předvedeme na aukci o jeden dolar.

Mějme v dražbě jeden americký dolar (1 USD). Vyvolávací cena nechť je jeden cent, tzn. 0.01 USD. Hráči mohou v dražbě přihazovat s minimálním povoleným příhozem jeden cent. Lze očekávat, že se dražba zastaví na úrovni 0.99 dolaru nebo na jednom dolaru. U této aukce je vidět, že předmět aukce má univerzálně známou hodnotu. Toto není u jiných aukcích obvyklé. Ohodnocení předmětu aukce je fenoménem aukcí – z pohledu kupujícího, prodávajícího i celé společnosti[1].

3.1 Užitek z aukce

Každý kupující i si předmět aukce privátně ohodnotí na hodnotu x_i. Je jeho pochopitelným zájmem tuto informaci nesdělovat ani konkurujícím kupujícím ani prodávajícímu. Pokud kupující i předmět aukce vyhraje a zaplatí nějakou cenu y_i, pak je jeho zisk z aukce dán

$$u_i = x_i - y_i$$

[1] V literatuře je popsán stav, kdy kupující nadhodnotí předmět aukce, v aukci zvítězí, zaplatí vysokou cenu a až po tom si uvědomí pravdivou hodnotu předmětu. Tento stav je nazýván jako *Winner's curse* (prokletí výherce). Podobně je na tom dilema po provedení rozhodnutí (*Post-Decision Dissonance*), kdy člověk přemýšlí, jestli se rozhodnul dobře.

Předpokládáme individuální racionalitu kupujícího, tedy situaci, kdy kupující chce maximalizovat svůj zisk u_i. Pokud kupující zaplatí částku $y_i = x_i$, pak je $u_i = 0$. Získá-li tedy kupující předmět aukce za takovou cenu, tak se jeho finanční bilance nezmění (nemá z ní užitek). Před aukcí měl např. 1000 peněz, předmět si ocenil na 1000 peněz, vydražil ho za 1000 peněz, ty i zaplatil a má teď předmět, který si cení na 1000 peněz. Žádná změna.

Kupující do aukce vstupuje formou své sázky (angl. bid) b_i. Je dost jisté, že racionální kupující nebude podávat sázku vyšší než je jeho ohodnocení předmětu, tedy jistě $b_i \leq x_i$.

Prodávající pochopitelně nezná tajná ohodnocení x_i hráčů (to mezi sebou neznají ani hráči). Může však pozorovat jejich sázky b_i. Prodávajícímu je dále jasné, že jeho výnos z aukce nebude u standardní aukce vyšší než

$$Revenue_{max} = \max_{i \in Q}[x_i]$$

Cílem prodávajícího je proto stanovit takový mechanismus aukce, aby motivoval hráče k podávání sázek b_i takových, aby se co nejvíce blížily jejich x_i, nejlépe takových, aby $b_i = x_i$. Je toto možné? Můžete donutit kupujícího odhalit jeho tajné hodnocení předmětu aukce a současně mu dát naději na kladný zisk? Uvidíme, že je to možné u tak zvaných vickreyovských aukcí.

3.2 Základní typy aukcí

Aukce mají svou veřejnou a tajnou formu. Při veřejné formě aukce na sebe hráči vidí, pozorují svoje chování a mohou nějak usoudit o tajném ohodnocení x_i svých protivníků. Tajné formy aukcí nejlépe odpovídají tak zvané obálkové metodě (angl. sealed-bid auction). V podstatě to jsou strategické hry v normální formě (statické, jednotahové hry).

Na veřejné formě aukce si předvedeme základní dva typy aukcí – aukci anglickou a holandskou.

Anglická veřejná aukce (vzestupná dražba)

A anglické aukce (také angl. ascending auction) se stanoví počáteční (vyvolávací) dražební cena a hráči mají možnost postupně tuto cenu zvyšovat svými příhozy, kterých může být libovolně mnoho. Každý příhoz tedy musí zvýšit aktuální dražební cenu. Aukce se ukončí, pokud již neexistuje hráč, který by aktuální dražební cenu svým příhozem zvýšil. Hráč, který umístil poslední příhoz, se stává vítězem aukce a zaplatí dražební cenu.

Z principu věci lze usoudit, že hráči přihazují, dokud je dražební cena nižší než jejich x_i. Pokud sestupně seřadíme x_i hráčů do posloupnosti

$x_i, x_j, x_k, \ldots$

pak hráč i získává předmět aukce za cenu $x_j + \delta$, kde δ může být libovolně malé. Fakticky tak platí druhou nejvyšší nabídnutou cenu a realizuje zisk $u_i = x_i - (x_j + \delta)$, kde δ byl jeho poslední příhoz. Prodávající se musí smířit s faktem, že se hráčovo ohodnocení x_i nikdy nedozví.

Anglická aukce je nejpopulárnějším aukčním mechanismem. U anglické aukce fakticky kupujícího nemusí zajímat ohodnocení x_j jeho protivníků, neboť přihazuje do výše svého x_i. Dále uvidíme, že anglická aukce je strategicky nemanipulovatelná, tedy, hráč nemá profit z toho, když prezentuje svoje x_i nepravdivě[2].

Holandská veřejná aukce (sestupná dražba)

V holandské aukci (také angl. descending auction) je situace obrácená – počáteční cena je arbitrem aukce postupně snižována do okamžiku, kdy se jeden z kupujících přihlásí a cenu akceptuje. Ten se stává vítězem aukce a tuto cenu i zaplatí. Tato aukce historicky vznikla na trzích, kde bylo potřeba zboží rychle prodat (ryby, květiny). Z pohledu aukcí je ovšem holandská aukce velmi významná svým vztahem k citlivosti na riziko hráčů.

Z principu aukce je evidentní, že hráč o věc začne jevit zájem až v okamžiku, kdy dražební cena klesne pod jeho x_i. Aby maximalizoval svůj zisk z aukce, musí pak nechat dražební cenu vhodně dál klesnout, přitom však se zvyšuje pravděpodobnost, že na cenu přistoupí nějaký z protivníků. U holandské aukce je proto nutné provádět zkoumání možného ohodnocení věci protivníky. V této aukci hraje značnou roli citlivost hráče k riziku, tedy jeho vztah mezi ziskem a dosaženým užitkem ze zisku. V předchozích textech byl vztah mezi ziskem a užitkem již zaveden. Připomeňme, že hráč neutrální k riziku vnímá užitek lineárně rostoucí se ziskem, kdežto hráč citlivý k riziku (obávající se rizika) preferuje nižší ale jistější zisk před vyšším nejistým. Takový hráč se v holandské aukci přihlásí dříve než hráč s neutrálním vztahem k riziku.

3.3 Strategická ekvivalence anglické a holandské aukce

Veřejná forma anglické a holandské aukce je rozdílná. V mnoha případech však prodávající preferuje tajnou (obálkovou, angl. sealed-bid) formu podávání sázek. Proto může být zajímavé srovnání veřejných a tajných forem aukcí.

Zavedeme si dvě formy tajné aukce: aukci s první cenou a aukci s druhou cenou. Vždy bude vítězem hráč s maximální podanou sázkou, tedy

$$i^* = arg\max_i [b_i]$$

Zbývá dořešit, jakou cenu hráč zaplatí. V tajné aukci s první cenou (first price sealed-bid auction, 1st price auction) zaplatí vítěz cenu na úrovni nejvyšší sázky, tedy tu svoji nabídnutou cenu. V tajné

[2] V pokročilejším studiu se můžeme zabývat tak zvanými false-bidders, jakýmisi provokatéry v aukcích. Jejich cílem je vyhnat aukční cenu do jejich zvolené úrovně. Pochopitelně čelí riziku, že předmět aukce vydraží oni. To je ovšem pokročilejší problém.

aukci s druhou cenou (second price sealed-bid auction, 2nd price auction) zaplatí vítěz i^* druhou nejvyšší nabídku, tedy

$$y^*_{II} = \max_{j \in Q \setminus \{i^*\}} [b_j]$$

Následující theorém stanoví strategickou ekvivalenci mezi tajnými a veřejnými aukcemi.

Věta 4. *Veřejná sestupná dražba (holandská aukce) je ryze strategicky ekvivalentní s tajnou dražbou s první cenou.*

Veřejná vzestupná dražba (anglická aukce) je slabě strategicky ekvivalentí s tajnou dražbou s druhou cenou.

Slabá strategická ekvivalence anglické aukce a tajné 2nd price aukce je dána rozdílem mezi platbou výherce, který se liší o libovolně malý příhoz nad druhou cenu, který musí hráč s nejvyšším x_i provést, aby se stal vítězem (v tajné aukci se stává vítězem deklarací své sázky).

3.4 Ekvilibrium v tajných aukcích

Ekvilibrium v anglické a holandské dražbě budeme zkoumat na jejich tajných strategických ekvivalentech. Strategicky jednodušší je tajná aukce s druhou cenou, neboť ta je oproštěna od nutnosti zkoumat tajná ohodnocení u protivníků.

Věta 5. *Uvažujme tajnou aukci, kde vítězem je hráč s nejvyšší podanou nabídkou. Vítěz platí druhou nejvyšší nabídnutou cenu. Pak je ekvilibriem v situaci pro každého hráče (symetrickým ekvilibriem) podat sázku*

$$\beta^*_{II}(x) = x$$

Strategie podat $\beta^*_{II}(x)$ při ohodnocení $x = x_i$ u hráče i je strategií tvořící pro hráče Nashovo ekvilibrium. Hráč, který z této strategie vybočí, nezvýší svůj zisk, jak o tom v roce 1960 informoval William Vickrey.

Věta 6. *Pro každou sázku $b_1, b_2, ..., b_N$ a každou jinou b'_i, nechť u_i je užitek i-tého hráče při hraní b_i a u'_i je jeho užitek při hraní b'_i. Pak $u_i \geq u'_i$.*

William Vickrey (1960)

Proof. Předpokládejme, že hráč i při své sázce b_i vyhraje a zaplatí (druhou nejvyšší) cenu y^*. Jeho zisk je tedy $u_i = b_i - y^* \geq 0$. Při možné manipulaci $b'_i > y^*$, i je stále vítězícím hráčem a $u'_i = u_i$. V druhém případě, kdy $b'_i < y^*$, i prohraje a $u' = 0 \leq u$.

Pokud hráč i při sázce b_i prohraje, pak $u_i = 0$. Pak je vítěz $j \in Q; j \neq i$ se sázkou $b_j \geq b_i$ (nebo lépe $b_j > b_i$). Pro $b'_i < b_j$ hráč i stále prohrává a $u'_i = 0$. Pro $b'_i \geq b_j$ (nebo striktně vyšší), i vyhrává a platí $y^* = b_j$, ale jeho zisk je $u'_i = b_i - b_j \leq 0$, tzn. $u'_i \leq u_i$. □

Princip druhé ceny se stal základem tak zvaných vickreyovských mechanismů a i tato aukce se nazývá vickreyovská.

Vyhodnocení ekvilibria v aukcích s první cenou je složitější, neboť vyžaduje pravděpodobnostní model ohodnocení předmětu aukce protivníky. Pro jednoduchost si představíme ekvilibrium v situaci, která předpokládá, že na intervalu $\langle 0, \omega \rangle$ je hustota pravděpodobnosti ohodnocení x_i všemi hráči rovnoměrně rozložena (jinak řečeno, všechna ohodnocení z $\langle 0, \omega \rangle$ jsou stejně pravděpodobná).

Věta 7. *Mějme N nezávislých hráčů se symetrickým privátním ohodnocením x_i, které je rovnoměrně distribuováno na $\langle 0, \omega \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:*

$$\beta_I^*(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Příklad 1st price aukce

Předpokládejme tajné symetrické ohodnocení předmětu rovnoměrným pravděpodobnostním rozložením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pokud je mé ohodnocení např. $x_1 = 0.8$ a $N = 2$, pak je můj očekávaný zisk nejvyšší pro sázku $b_i = 0.4$, což dokumentuje obrázek 3.1. Pro moji sázku $b_i = 0.8$ je pravděpodobnost mé výhry 0.8 a zisk nulový. Se snižující sázkou klesá pravděpodobnost mé výhry, ale roste možný zisk.

b_1	$\pi_1 =$ pravděpodobnost výhry $*u_1$
0.8	0.8*0
0.7	0.7*0.1=0.07
0.6	0.6*0.2=0.12
0.5	0.5*0.3=0.15
0.4	0.4*0.4=0.16
0.3	0.3*0.5=0.15
0.2	0.2*0.6=0.12

Figure 3.1: Očekávaný zisk příkladu aukce s první cenou

Pokud je pravděpodobnostní model tajného ohodnocení věci jiný, pak může být ekvilibrium značně složitější.

3.5 Vliv citlivosti k riziku na ekvilibrium v aukci

Začneme zjištěním, že risk-averse hráč v aukci s první cenou preferuje nižší zisky, což se projeví na jeho racionálních sázkách.

Věta 8. *Mějme N nezávislých hráčů se symetrickým privátním ohodnocením x_i, které je rovnoměrně distribuováno na $\langle 0, \omega \rangle$. Předpokládáme hráče citlivé k riziku (risk-averse) s koeficientem citlivosti $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:*

$$\beta_I^*(x) = x^\alpha$$

Může prodávající v aukci nějak využít znalosti o vztahu kupujících k riziku? Prodávající volí aukční mechanismus a to je jediná strategie, kterou ve hře proti kupujícím volí.

Ukážeme, že pokud prodávající čelí kupujícím neutrálním k riziku, pak je indiferentní ve svém očekávání vůči volbě aukce s první cenou a druhou cenou. Jinak řečeno, jeho očekávaný výnos (expected revenue) v těchto dvou formách aukce je stejný. Dokumentuje to tak zvaný Revenue equivalence theorem. Dále uvidíme, že pokud jsou kupující citliví k riziku, prodávající dosáhne vyššího výnosu u aukce s první cenou.

Předpokládejme dva kupující neutrální k riziku s privátními ohodnoceními x_1 a x_2 rovnoměrně rozloženými na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pak je cena placená vítězem v aukci s první cenou $y_I = \max(x_1/2, x_2/2)$ a v aukci s druhou cenou $y_{II} = \min(x_1, x_2)$.

Je možné snadno odvodit, že střední hodnota výnosu v obou akcích je $E(y_I) = E(y_{II}) = \frac{1}{3}$. Vypadá to tedy, že v těchto dvou situacích je očekávání výnosu stejné. Povrzuje to Revenue equivalence theorem:

Věta 9 (Revenue equivalence theorem)**.** *Předpokládejme risk-neutral hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, aukce je standardní a zaručuje nulovou platbu hráči deklarujícímu nulové ohodnocení. Pak je výnos aukce při aukci s první cenou shodný s aukcí s druhou cenou.*

Závěr je tedy jednoznačný: **Hrají-li risk-neutral hráči, je jedno, zda volíme 1st nebo 2st price aukci.**

A následující theorém Revenue equivalence theorem doplňuje dalším zjištěním: **Hrají-li risk-averse hráči, je lépe volit 1st price aukci.**

Věta 10. *Předpokládejme risk-averse hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, pak je výnos aukce při aukci s první cenou vyšší než u akce s druhou cenou.*

3.6 Vickrey-Clarke-Groves mechanismus

W. Vickrey v roce 1961 publikoval návrh aukce s druhou cenou, kde ukázal, že je nemanipulovatelná (hráč deklarující nepravdivé ohodnocení předmětu nezíská víc). Clarke (1971) a Groves (1973) tuto myšlenku zobecnili do VCG-mechanismu.

3.6.1 Notace

Předpokládejme množinu alternativ A. Na ní každý hráč deklaruje svou ohodnocovací funkci

$$v_i : A \to \mathbb{R}$$

Hráč dává funkcí v_i veřejně najevo, jak si cení jednotlivé alternativy $a \in A$. Množina všech ohodnocovacích funkcí hráče je V_i (je to totožné s S_i u strategických her). **Může nám sdělit libovolný postoj $v_i \in V_i$, my chceme jeho pravdivý postoj.**

Dále definujeme $v = (v_1, v_2, ..., v_N)$ jako profil ve hře $v \in V$ a podobně množinu profilů $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_N$. Podobně chápeme V_{-i} a v_{-i}.

3.6.2 Mechanismus (direct revelation)

Začneme definicí obecného mechanismu, kde vystupuje veřejná volba jedné z alternativ a s ní spojené platby všech hráčů.

Definice 12. *Mechanismus (direct revelation) je dán funkcí veřejné volby $f : V_1 \times ... \times V_N \to A$ a vektorem plateb $p_1, ..., p_N$, kde $p_i : V_1 \times ... \times V_N \to \mathbb{R}$ je částka, kterou zaplatí hráč i.*

Hra se pak odehraje v techto krocích:

- Hráči sdělí své ocenění, tzn. postoje $v_i \in V_i$ vůči různým alternativám $a \in A$.
- Funkce veřejné volby rozhodne, která alternativa $a \in A$ se zvolí.
- Určí se pro každého hráče $i \in Q$, kolik zaplatí – $p_i : V_1 \times ... \times V_N$.

Cílem je formulovat mechanismus takový, aby žádný hráč nemohl těžit z představení svého nepravdivého postoje – tzn. aby nemohl manipulovat volbu alternativy a svou platbu do systému.

Definice 13. *Mechanismus $(f, p_1, ..., p_N)$ se nazývá **nemanipulovatelný** (incentive compatible, strategy-proof), pokud pro každého hráče i, pro každý profil $v \in V$ a každé $v'_i \in V_i$, pokud víme, že $a = f(v_i, v_{-i})$ a $a' = f(v'_i, v_{-i})$, pak platí*

$$v_i(a) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(a') - p_i(v'_i, v_{-i})$$

Téma se stále opakuje dokola: pokud hráč říká pravdu, není na tom hůř než když lže. Při troše herně teoretické fantazie nám může definice připomínat definici Nashova ekvilibria, což fakticky i je.

3.6.3 VCG-mechanismus

Hledáme takovou funkci veřejné volby f, aby v dané situaci vybírala veřejné optimum, tzn.

$$a^* = arg \max_{a \in A} \sum_i v_i(a)$$

Definice 14. *Mechanismus* $(f, p_1, ..., p_N)$ *se nazývá Vickrey-Clarke-Groves mechanismus (VCG), pokud:*

- f *maximalizuje společenský užitek, tedy*

$$f(v_1, ..., v_N) \in arg \max_{a \in A} \left[\sum_i v_i(a) \right]$$

- *pro sadu funkcí* $h_1, ..., h_N$*, kde* $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$*, definujeme*

$$p_i(v_1, ..., v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$$

$$p_i(v_1, ..., v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$$

Jinak řečeno, platba za účast ve hře je dána složkami:

- $h_i(v_{-i})$, tedy platby, o které rozhodne mechanismus z kontextu v_{-i}.
- $-\sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$, tedy nahrazení hodnoty, kterou protihráči ztrácí faktem, že nejsou vybráni.

Je tedy definován VCG-mechanismus, nyní nás zajímá jeho odolnost proti strategické manipulaci:

Věta 11. *Každý VCG-mechanismus je strategicky nemanipulovatelný.*

Důkaz najdeme v publikaci Algorithmic Game Theory[Nisan, p. 219].

3.6.4 Clarke Pivot Rule

Trochu jsme odsunuli problém jeho převedením na formulaci funkcí $\{h_i(v_{-i})\}_{i \in Q}$.

Definice 15. *Mějme VCG-mechanismus.*

- *Mechanismus je (ex-post) individuálně racionální, pokud hráči vždy získají kladný zisk (tedy i nulový). Formálně, pro všechny* $v \in V : v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0; \forall i \in Q$.

- *Mechanismus nemá žádné postranní platby, pokud žádný hráč platbou nezíská. Formálně,* $\forall v \in V : \forall i \in Q : p_i(v) \geq 0$ *(p_i nedává záporné hodnoty platby).*

Hráč i účastí ve hře získává $u_i(v) = v_i(f(v)) - p_i(v)$, tzn. jak si cení výsledku $f(v)$ po odečtu platby $p_i(v)$.

Definice 16. *Clarke pivot platba je*

$$h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \left[\sum_{j \neq i} v_j(b) \right]$$

Potom je platba hráče v profilu $v \in V$ *dána*

$$p_i(v) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

kde $a = f(v)$*.*

Hráč zaplatí do systému částku, která se rovná celkové škodě, kterou ostatním způsobil.

Lemma 12. *VCG mechanismus s Clarke pivot platbou nezpůsobuje žádné postranní platby. Pokud je* $v_i(a) \geq 0$ *pro všechny* $v_i \in V_i$ *a* $a \in A$*, pak je také individuálně racionální.*

3.7 Příklady aplikace VCG-mechanismu

VCG-mechanismus je obecným pojetím nemanipulovatelného mechanismu, kdy je třeba zvolit veřejně jednu z alternativ, ze které pro hráče plynou přínosy a náklady. Berme VCG-mechanismus jako parametrizovatelnou definici, tzn. jejím dospecifikováním získáváme mechanismus pro konrétní situaci.

Na následujících příkladech ukážeme dvě příhodné aplikace – aukci o jeden předmět a mechanismus pro odvození plateb při stavbě veřejně prospěšného zařízení (podobný příklad jsme řešili v kooperativních hrách).

VCG mechanismus – single-object aukce

Množinu alternativ zde tvoří množina možných vítězů aukce o předmět, tedy $A = \{i - wins | i \in Q\}$ – tedy množinu identifikací vítěze.

Předpokládáme, že každý hráč hodnotí své vítězství kladně a vítězství jiného nulově, tedy

$$V_i = \{v_i | v_i(i - wins) \geq 0; \forall j \neq i : v_i(j - wins) = 0\}$$

Pokud má hráč v plánu deklarovat pouze cenu x_i, pak je $v_i(i - wins) = x_i, v_i(j - wins) = 0 \ \forall j \neq i$. Jinak může deklarovat další funkce $v_i^1, v_i^2, ...$

VCG mechanismus s Clarkovým pivotem nám dává přesně Vickreyovu aukci.

Ukažme si jednoduchý příklad. Mějme situaci tří hráčů, tzn. $A = \{1, 2, 3\}$, kde $x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 4$. Následuje jeden možný profil $v = (v_1, v_2, v_3)$:

i/A	1	2	3
$v_1(a)$	10	0	0
$v_2(a)$	0	15	0
$v_3(a)$	0	0	4

Funkce veřejné volby optimalizuje veřejný užitek, tedy hledá alternativu $a \in A$ takovou, že $\sum_i v(a)$ je na množině A maximální. Tedy, $f(v) = 2$ je zvolena alternativa "vyhrál 2". Platby hráčů jsou potom:

$$p_1(v) = \max[0, 15, 4] - 15 = 0$$

$$p_2(v) = \max[10, 0, 4] - 0 = 10$$

$$p_3(v) = \max[10, 15, 0] - 15 = 0$$

Tento VCG-mechanismus se tedy chová naprosto stejně jako vickreoyvská aukce, což jsme chtěli ukázat.

VCG mechanismus – stavba veřejně prospěšného objektu

Mějme komunitu o N jedincích, kde se řeší otázka stavby veřejně prospěšného zařízení, jehož stavební náklady jsou určeny jako C. Vláda bude stavbu finančně garantovat, pokud budou hráči deklarovat svůj zájem dostatečně velký $\sum_i v_i > C$. Z deklarovaného zájmu mají vyplynout příspěvky hráčů na financování projektu. Zřejmě každý hráč bude mít zájem na realizaci projektu, ale bude zvažovat, jakou hodnotu bude deklarovat – vyplyne totiž z ní jeho příspěvek.

Předpokládáme hráče $v_i \geq 0$, ale je přípustné i $v_i < 0$. Problémem je oznámit pivotní pravidlo takové, aby hráči měli potřebu pravdivě deklarovat svá v_i.

Proto vláda deklaruje jako součást mechanismu Clarke pivot tak, že hráč i s $v_i \geq 0$ zaplatí nenulovou částku pouze tehdy, je-li pivotním hráčem, tzn.: $\sum_{j \neq i} v_j \leq C$ a současně $\sum_{j \in Q} v_j > C$. V takovém případě zaplatí hráč $p_i = C - \sum_{j \neq i} v_j$

Hráč se záporným ohodnocením zaplatí nenulovou částku pouze, když $\sum_{j \neq i} v_j > C$ a $\sum_j v_j \leq C$, pak $p_i = \sum_{j \neq i} v_j - C$.

Bohužel vždy bude platit $\sum_i p_i < C$. Situace je jiná, než u příkladu se Shapleyho hodnotou (tady hráči nemusí dát v sumě C).

Mějme tři hráče s jejich deklarovanou hodnotou pro stavbu projektu: $v_1 = 10, v_2 = 5, v_3 = 4$, $C = 17$. Z pivotu plynou tyto platby hráčů:

$$p_1 = 17 - 9 = 8$$

$$p_2 = 17 - 14 = 3$$

$$p_3 = 17 - 15 = 2$$

Což dává v sumě $\sum_j p_j = 13$. Mechanismus je odolný proti manipulaci, neboť pokud $v_1' = 8$, pak $p_1' = 17 - 9$. Při $v_1'' = 7$ se stavba již nepostaví.